3D и 2D подходы к описанию модуляции интенсивности галактических космических лучей.

Калинин М.С., Крайнев М.Б.

Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, Россия, г. Москва

e-mail: kalininms@lebedev.ru

Секция: МОД

АБСТРАКТ

В докладе рассмотрены вопросы, связанные с описанием модуляции интенсивности галактических космических лучей (ГКЛ) на основе решения 3D и 2D стационарного транспортного уравнения для функции распределения (ФР). Особенностью 2D уравнения является то, что оно получено из 3D уравнения путём его редукции по долготной координате и отличается от обычного 2D уравнения учётом дрейфового потока частиц ГКЛ вдоль трёхмерного гелиосферного токового слоя (ГТС), присущего 3D подходам. При этом скорость дрейфа представлена только регулярной частью, а сингулярный 3D поток на ГТС, распределённый по ширине секторной зоны, входит в регулярную скорость в виде добавки, пропорциональной $K_T/K_\perp$. В результате в 2D уравнении отсутствует расходимость как на границах секторной зоны, так и на гелиоэкваторе, характерная для паркеровского транспортного уравнения.

Решение задачи проведено для широко распространённой однопараметрической модели ГТС, получившей название «модель наклонного токового слоя» (НТС), где модельный параметр – угол наклона ГТС α меняется в широких пределах в 11-летнем цикле солнечной активности (СА). В основу подхода была положена геометрическая симметрия модели НТС $S(\tilde{\phi})=S(\pi-\tilde{\phi})$, $\tilde{\phi}=\phi+\omega(r-r_S)/V_r$, $S=0$ – уравнение поверхности ГТС. Этой же симметрией обладает и решение $\mathcal{U}(\mathbf{r})$ 3D уравнения. Это свойство используется при редукции 3D уравнения в 2D.

В докладе уделено внимание сравнению основных характеристик решений апприорного двумерного уравнения с полученным из 3D 2D уравнением, а также усреднённых по долготе решений 3D уравнения с 2D решениями при одинаковых модуляционных параметрах.

ВВЕДЕНИЕ

В работе в краткой форме представлены результаты многолетних усилий по представлению 3D транспортного уравнения (ТРУ) галактических космических лучей (ГКЛ) в простейшей модели гелиосферы где единственнпой трёхмерной характеристикой является

изогнутый токовый слой (модель НТС), а магнитное поле является паркеровским двухкомпонентным, r,ϕ компоненты, не зависящие от долготы. Постановка такой задачи относится к концу прошлого века и имеет достаточно серьёзные основания. Во-первых, 3D решения в такой простой постановке (коэффициенты уравнения не зависят от долготы) в любом из секторов крайне слабо зависят от долготы (в пределах одного процента), и для описания измерений обычно используются усреднённые по долготе значения. Во-вторых, при больших размерах гелиосферы, требование малости пространственных шагов приводит к чрезмерному увеличению рассчётного времени. В третьих, один из механизмов модуляции в транспортном уравнении – дрейфовое движение заряженных частиц в неоднородном магнитном поле, локализовано вблизи гелиосферного токового слоя (ГТС) (в слое $-2R_L, 2R_L$ вблизи от него), а это при малых энергиях частиц весьма узкий транспортный коридор, требующий дополнительного измельчения пространственного шага для преемлемого разрешения профиля скорости дрейфа как функции расстояния от ГТС (отметим, что эта проблема остаётся актуальной и при решении задачи методом Монте-Карло).

Все перечисленные причины и привели лет 30 назад к постановке задачи (постановка задачи в России принадлежит Крайневу М.Б.): редуцировать 3D транспортное уравнение ГКЛ таким образом, чтобы сохранить вклад всех физических механизмов модуляции, содержащихся в нём. Поскольку к 90-м годам прошлого века было экспериментально установлено, что гелиосфера является в основном двумерной, радиальное расстояние r и полярный угол θ (или широта λ), то исключить следовало долготу. Отметим здесь также, что априорное осесимметричное уравнение не является полным при описании

дрейфов: долготная компонента скорости дрейфа выпадает из рассмотрения даже в случае модельного двухкомпонентного паркеровского ГМП. До середины 90-х годов прошлого века его ширико применяли для описания модуляции интенсивности ГКЛ при наличии плоского ГТС.

1. МЕТОДИКИ РЕШЕНИЯ 3D ТРУ.

Первой работой, в которой был применён 3D подход к решению ТРУ является работа (Кота, Джокипии, 1983) [1]. В этой статье авторы при очень простых коэффициентах ТРУ, не зависящих от долготы (постоянная скорость солнечного ветра (СВ), паркеровское двухкомпонентное ГМП, коэффициенты диффузии $\sim p^{1/2}/B$ и размерах гелиосферы 10 а.е.), впервые провели численное решение уравнения и описали методику расчёта. Ими был использован метод дробных шагов по координатам (Яценко, 1956). Эта работа стала в дальнейшем эталоном для других исследователей, использующих другие схемы решения. В дальнейшем, в силу трудоёмкости, эта методика не получила широкого распространения при описании экспериментальных данных.

Паралельно группа исследователей из университета г.Потчесрум, ЮАР (Подгейтер, Бургер, Ле Руа и др., см. также [2]), много времени и сил посвятивших численному моделированию и аппроксимации скорости дрейфа, начиная с ≈1995 г. развили другой подход к численному решению 3D ТРУ, основанный на координатной прогонке по каждой переменной с использованием методики неопределённых множителей (схема Джексона). До недавнего времени эта группа была лидером при описании практически всех крупных экспериментов. Отличительной чертой (и недостатком, как считают некоторые специалисты) их методики является упор на многопараметрическое описание спектральных характеристик данных измерений. По крайней мере, три используемых ими параметра носят чисто геометрический смысл и их связь с гелиосферными характеристиками (параметрами модуляции) неясна.

Начиная с 2000-х годов, после пионерской работы (Ming Zhang, 1999) [3], для решения 3D ТРУ стал применяться метод Монте-Карло, основанный на

стохастическом аналоге этого уравнения. Применение этого подхода, также достаточно друдоёмкого, стало возможным всвязи с бурным развитием вычислительной техники в последние два десятилетия. Несомненным преимуществом этого метода является возможность проводить вычисления при любых распределениях ГМП в гелиосфере. Не всегда при описании одних и тех же данных измерений вычислительные параметры решения методом конечных разностей и методом Монте-Карло совпадают, однако первый метод всё ещё остаётся достойным конкурентом второго.

2. ПЕРВЫЕ ПОДХОДЫ К РЕДУКЦИИ 3D→2D.

Первой полноценной работой (не считая работ с формулировкой 2D уравнения в общем виде и прикидочных работ по его решению) по редукции явилась работа [4]. В этой работе 3D ТРУ рассматривалось в системе координат наблюдателя, т.е. использовался его нестационарный вариант. Его 2D аналог был сформулирован в виде:

$$\begin{gathered}\partial U/\partial t - \nabla(K\nabla U) + (\mathbf{V} + \mathbf{V}_d^{(\mathrm{a})})\nabla U \\ - (\nabla\mathbf{V}/3)p(\partial U/\partial p) = -\langle \mathbf{V}_d \nabla u\rangle,\end{gathered} \tag{1}$$

где U − функция распределения, нормированная на плотность частиц, $\mathbf{K}$ − симметричный тензор диффузии, $\mathbf{V}=V_r\mathbf{e}_r$ − скорость СВ, $\mathbf{V}_d^{(a)}=[\nabla\times FK_T\mathbf{n}_1]$ − полная средняя скорость дрейфа, $F=(1/2\pi)\int_0^{2\pi}\Im d\phi$ − среднее значение знаковой функции $\Im$ в секторной зоне (СЗ), K_T − компонента антисимметричного тензора, $\mathbf{n}_1$ – единичный вектор, направленный вдоль ГМП. Выражение в квадратных скобках в правой части (1) представляет среднее значение по полному долготному периоду 2π. Его можно представить в виде: $\langle \mathbf{V}_d\nabla u\rangle_\phi=\nabla\cdot[K_T\mathbf{n}_1\times\mathbf{f}^+]$, где $\mathrm{f}_i^+=(1/\pi)\int_{\pi-\phi_1}^{2\pi+\phi_1}\nabla_i u d\phi$ − интеграл по сектору положительной полярности ГМП.

Приведённая формулировка (1) редуцированного 3D уравнения является одной и той же независимо от формулировки исходного уравнения: в виде

дивергенции от полного диффузионно-дрейфового потока или с выделением слагаемого со скоростью дрейфа. Для замыкания уравнения требуется найти выражение для вектора f_i^+ через ∇U. Уравнение для f_i^+ было сформулировано исходя из условий для диффузионно-дрейфовых потоков на ГТС, причём симмеерия ГТС не предполагалась (произвольная форма ГТС). Это соотношение имеет вид

$$\mathbf{f}^+ \cdot \nabla F = (K_T / K_\perp)(1 - F^2)\{[\mathbf{n}_1 \times \nabla U] \cdot \nabla F - \mathbf{n}_1 \cdot [\nabla \times \mathbf{f}^+]\} \qquad (2)$$

где левая часть равенства (2) получена путём формального усреднения по долготе исходного выражения в каждом из секторов, и использовано равенство $\mathbf{f}^- = -\mathbf{f}^+$. Поскольку функциональное решение уравнения (2) (без задания зависимости $\mathbf{K}$ и ∇U от координат) получить затруднительно, было получено решение для частного случая $K_T / K_\perp = \pm 1.$, где нижний знак соответствует отрицательному сектору с $K_T < 0$. Физически это соответствует условию, когда диффузионно-дрейфовые потоки, обусловленные ∇u всреднем равны нулю в каждом из секторов. В качестве решения уравнения (2) в работе [ ] было предложено выражение

$$\mathbf{f}^+ = -[F(1 - F^2)/(2 - F^2)]\nabla U,$$

которое и вошло в формулировку редуцированного уравнения. Позднее (после выхода работы [4]) было выяснено, что простая подстановка $\mathbf{f}^+ = a(F)\nabla U$ с $a(F) = F \arcsin F$ является решением уравнения (2) в этом случае.

В 2021 году в работе [5] было проведено сравнение правой части уравнения (1) со скоростью дрейфа, полученной в редуцированном уравнении с оценкой этого же выражения, полученной из решения полной 3D задачи. В случае использования скорости дрейфа 2D редуцированной задачи оценка правой части уравнения (1) оказалась существенно выше оценки, полученной в 3D модели (был использован код группы ЮАР).

3. РЕДУКЦИЯ 3D→2D В РАМКАХ МОДЕЛИ НТС.

Анализ скорости дрейфа в редуцированном 2D уравнении (1) с решением для $\mathbf{f}^{+}=F\arcsin F\nabla U$ показывает, что скорость расходится на границах секторной зоны по широте. Эта расходимость не является фатальной с вычислительной точки зрения, но может приводить к скачкам ∇U на этих поверхностях. С идейной точки зрения такое положение находится в противоречии с априорным требованием гладкости U везде в области решения. Поскольку все современные 3D подходы сформулированы в рамках модели НТС (модель наклонного токового слоя), то уместно при редукции ограничиться именно этим случаем. Кроме того, с развитием методов решения трёхмерных задач Монте-Карло нет необходимости в рассмотрении нестационарных задач методом конечных разностей.

Поэтому при постановке задачи авторы ограничились стационарным вариантом транспортного уравнения для ГКЛ, а его анализ проводится в системе координат вращающегося Солнца. В качестве ГТС использовалась широко распространённая модель НТС, которая в каждой из полусфер (северной и южной) отличается долготной симметрией поверхности относительно значений долготы $\tilde{\phi}=\pi/2+\omega(r-r_s)/V_r$ и $\tilde{\phi}=3\pi/2+\omega(r-r_s)/V_r$, где r_s - радиус поверхности источника ГМП. Это значит, что 3D решение обладает той же симметрией $\mathcal{U}(r,\theta,\tilde{\phi})=\mathcal{U}(r,\theta,\pi-\tilde{\phi})$. Впервые симметрия 3D решения ТРУ была использована в работе [1].

Другим полезным свойством модели НТС является возможность параметризации его положения относительно гелиоэкватора. При изменении параметра (имеющего смысл косинуса полярного угла в наклонённой под углом α поверхности) ГТС непрерывно переходит к поверхностям, обладающим такой же симметрией как и исходная (эти повехности получили название «подобных ГТС». При изменении параметра от 1 до -1 вся гелиосфера наделяется геометрической структурой подобной ГТС. С этой структурой в каждой точке гелиосферы можно связать локальную систему координат (ЛСК), в которой коэффициенты ТРУ описываются простейшим образом: $\mathbf{n}_x=A\mathbf{B}/B$,

$\mathbf{n}_y = \nabla S / |\nabla S|$, $\mathbf{n}_z = [\mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_y]$. В такой системе координат симметричный тензор диффузии $\mathbf{K}_S$ диагонален, антисимметричный тензор $\mathbf{K}_A$ характеризуется двумя компонентами $K_{23} = \sigma K_T \cos\chi$ и $K_{32} = -\sigma K_T \cos\chi$, σ − известный параметр, определяющий распределение скорости дрейфа вблизи ГТС, K_T − дрейфовый коэффициент, имеющий стандартное определение, χ − угол между радиальным направлением и направлением ГМП.

Исходя из формулировки исходного 3D уравнения в виде

$$\nabla\cdot(\mathcal{K}\cdot\nabla\mathcal{U}) - \mathbf{V}_S\cdot\nabla\mathcal{U}) + (\nabla\cdot\mathbf{V}_S/3)\partial\mathcal{U}/\partial\ln(p/p_m) = 0, \qquad (3)$$

$\mathcal{K} = \mathbf{K}_s + \mathbf{K}_A$, $\mathbf{V}_S$ − скорость СВ в системе координат вращающегося Солнца, введя определения

$$\mathcal{U} = U + u\ ,\ U(r,\theta,p) = \int_{\phi}^{\phi+2\pi} \mathcal{U}(r,\theta,\phi,p)\,d\phi/2\pi\ ,$$

можно показать [6], что трёхмерные градиенты в пределах каждого сектора определяются соотношениями:

$$(\partial u/r\partial\theta)^{\pm} = \pm(K_T/K_\perp)[\mathbf{n}_x \times \nabla U]\cdot\nabla F \sin\theta/(ctg\alpha + ctg\theta\sin\tilde{\phi})/2\ , \qquad (4)$$

а радиальная и долготная компоненты связаны равенствами

$$\cos\varphi(\nabla u\cdot\mathbf{n}_y) + \sin\varphi(\nabla u\cdot\mathbf{n}_z) = \sin\varphi[\mathbf{n}_x \times \nabla U]\cdot\mathbf{n}_y\ . \qquad (5)$$

$$-\sin\varphi(\nabla u\cdot\mathbf{n}_y) + \cos\varphi(\nabla u\cdot\mathbf{n}_z) = -\sin\varphi[\mathbf{n}_x \times \nabla U]\cdot\mathbf{n}_z\ . \qquad (6)$$

Здесь фазовая постоянная φ введена согласно равенству $tg\varphi = K_T/K_\perp$. Так как матрица связи орт ЛСК с ортами сферической системы координат известна, из (5) и (6) определяются $\partial u/\partial r$ и $(\partial u/\partial\tilde{\phi})/(r\sin\theta)$.

Компоненты векторов $\mathbf{f}^{\pm}$ по определению получаются интегрированием компонент градиентов по долготе в пределах сектора. В результате $\mathrm{f}_r^+ = \mathrm{f}_\phi^+ = 0$, и единственная ненулевая компонента − f_θ^+:

$$\mathrm{f}_\theta^+ = -A\cdot B,\ \ A = (K_T/K_\perp)[\mathbf{n}_x \times \nabla F]\cdot\nabla U\ , \qquad (7)$$

$B = arctg[\sqrt{ctg^2\alpha - ctg^2\theta}\cos\tilde{\phi}_1/(ctg\theta + ctg\alpha\sin\tilde{\phi}_1)]/\sqrt{ctg^2\alpha - ctg^2\theta}$, $\sin\tilde{\phi}_1 = ctg\alpha\, ctg\theta$.

Компонента f_θ^- вектора $\mathbf{f}^-$ получается интегрированием (3) по интервалу ($\tilde{\phi}_1, \pi - \tilde{\phi}_1$) (отрицательный по знаку ГМП сектор). Результат интегрирования равен выражению (4) со знаком плюс, и необходимое условие антисимметричности, $\mathbf{f}^- = -\mathbf{f}^+$, выполняется. Результат (7) можно сравнить с аналогичным, предложенным в статье [7].

При известном векторе $\mathbf{f}^+$ мы можем сформулировать редуцированное 2D уравнение:

$$\nabla\cdot(\mathbf{K}_S\cdot\nabla U) - \{\mathbf{V}_d^{(r)}\cdot(F\nabla U + \psi\frac{K_T}{K_\perp}[\mathbf{n}_x\times\nabla U]\cdot\mathbf{e}_\theta\} - \mathbf{V}_S\cdot\nabla U + \frac{\nabla\cdot\mathbf{V}_S}{3}\frac{\partial U}{\partial \ln p} = 0, \qquad (8)$$

в секторной зоне. Вне секторной зоны $F = \pm 1,\ \nabla F = 0$, и уравнение (8) переходит в обычное 2D уравнение с плоским ГТС. В уравнении (8) U – ФР, нормированная на плотность числа частиц; $\mathbf{K}_S$ – симметричная часть тензора диффузии; $\mathbf{V}_d^{(r)} = A(pv/3q)[\nabla\times K_T\mathbf{n}_x]$, p – импульс, v – скорость частицы, K_T – дрейфовый коэффициент, $\mathbf{n}_x = A\mathbf{B}/B$ – единичный вектор вдоль ГМП, всегда направленный от Солнца, $A = \pm 1$ – полярность ГМП в северном полушарии гелиосферы; $\mathbf{V}_S = V_r\mathbf{e}_r - \omega r\sin\theta$ – скорость солнечного ветра во вращающейся системе координат. Множитель ψ представляет достаточно сложную функцию широты и даётся выражением B из определений (7), $\psi = B$.

Отличительной чертой 2D уравнения (8) является наличие в нём только регулярной скорости дрейфа. Дрейф вдоль волнистого ГТС, присущий исходному 3D уравнению, в результате редукции трансформировался (размазался) по всей ширине секторной зоны и выступает теперь в виде регулярного дрейфа. Дрейф вдоль ГТС в редуцированном уравнении усреднился и входит в 2D уравнение в виде отношения $K_T/K_\perp$, с физической точки зрения это проявление конкуренции между случайной диффузией и регулярным дрейфом.

Решение U уравнения (8) является гладкой функцией, как и следовало ожидать. Однако градиент трёхмерной добавки u терпит разрыв на гелиоэкваторе (это следует из выражения (4)), определяемый соотношением,

точно совпадающим с соотношением из работы [8] (Джокипии, Коприва, 1979). Условия такого рода обычно устанавливаются в случае плоского ГТС.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kóta J. and Jokipii J. R. Effects of drift on the transport of cosmic rays VI. A three-dimensional model including diffusion // ApJ. 1983. V. 265. P. 573-581.

[2] Potgieter, M.S., Vos, E.E., Boezio, M., De Simone, N., Di Felice, V., and Formato, V., Modulation of galactic protons in the heliosphere during the unusual solar minimum of 2006 to 2009, Sol. Phys. 2013. doi 10.1007/s1120701303246/116. http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1302/1302.1284.pdf

[3] Ming Zhang, A MARKOV STOCHASTIC PROCESS THEORY OF COSMIC-RAY MODULATION//Aph. J. 1999. 513:409È420. 1999

[4] Kalinin M.S., Krainev M.B. Two_Dimensional Transport Equation for Galactic Cosmic Rays as a Consequence of a Reduction of the Three_Dimensional Equation // Geomagnetism and Aeronomy. 2014. V. 54. No. 4. P. 423–429.

[5] Kalinin M.S., Gvozdevsky B.B., Krainev M.B. et al. On the transition from 3D to 2D transport equations for a study of long-term cosmic-ray intensity variations in the heliosphere // POS(ICRC 2021)1323. https://pos.sissa.it/. doi: 10.22323/1.395.01323

[6] Калинин М. С., Крайнев М. Б. 3D- И 2D-ТРАНСПОРТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГАЛАКТИЧЕСКИХ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ В СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЯХ ГЕЛИОСФЕРЫ – I //КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ. 2025. Т. 63. № 6. Стр. 601–609

[7] Burger R.A. Modeling drift along the heliospheric wavy neutral sheet // ApJ. 2012. 760:60 (5pp). doi:10.1088/0004-637X/760/1/60

[8] Jokipii, J.R. and Kopriva, D.A., Effects of drift on the transport of cosmic rays. III. Numerical models of galactic cosmicray modulation, Astrophys. J. 1979. Vol. 234. P. 384–392.