39 ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ПО КОСМИЧЕСКИМ ЛУЧАМ

«Проблемы описания спектра окологоризонтальных атмосферных мюонов»

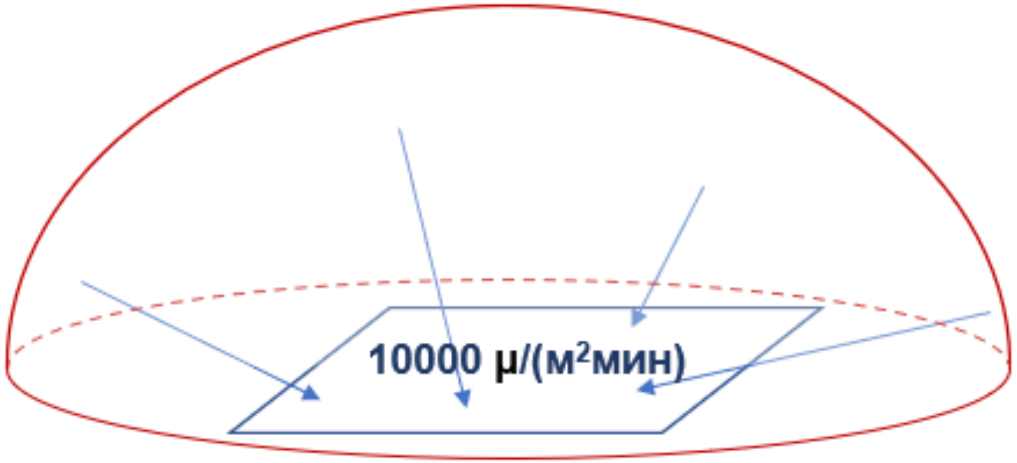
Коцева Х.Г.[1] , Горбунов С.А.[2,3]

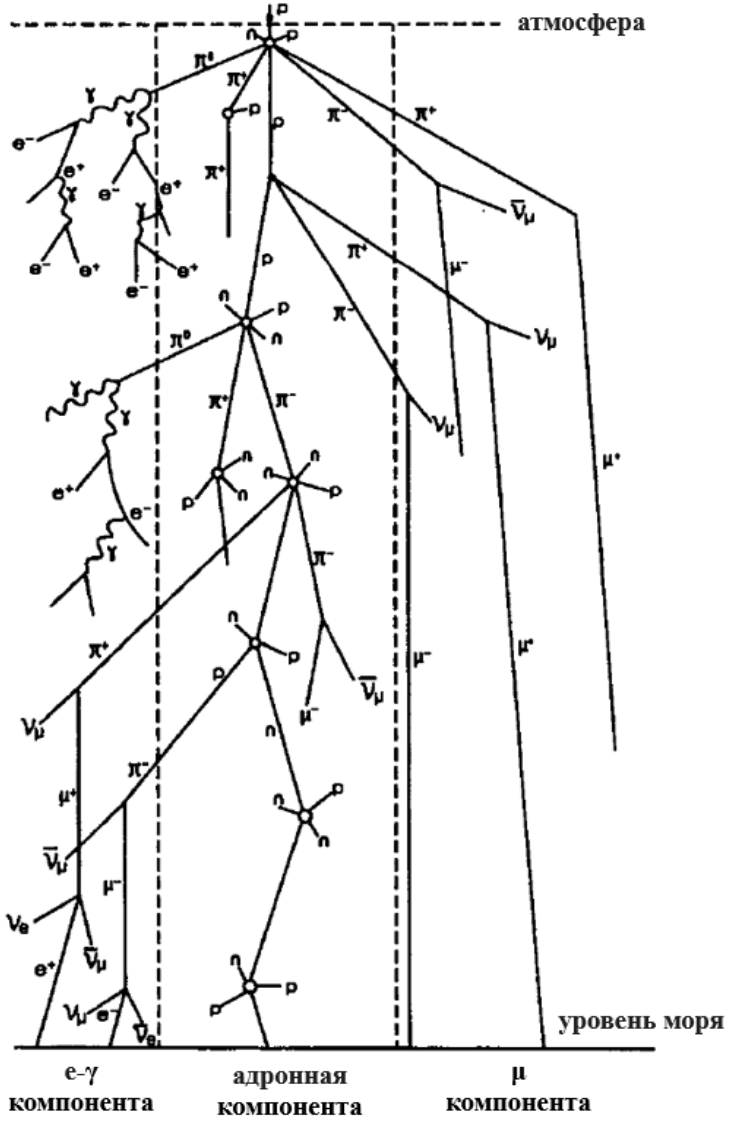
1. НИЯУ МИФИ, Россия, Москва, hristinakoceva2.hk@gmail.com
2. ФИАН, Россия, Москва, s.a.gorbunov@mail.ru
3. Университет «Сириус» , Россия

Дубна, 2026 г.

Общие сведения о мюонах

1. Возникают в верхних слоях атмосферы.
2. Мюоны это естественная радиация.
3. Высокая проникающая способность.
4. 10000 частиц на квадратный метр в минуту.





Мюоны можно использовать как естественный источник проникающего излучения

Принцип мюонографии

- Ослабление потока мюонов связано с линейной плотностью $\int_0^l \rho(l')dl'$ (количеством вещества) - по угловому распределению можно описать плотностную структуру объекта

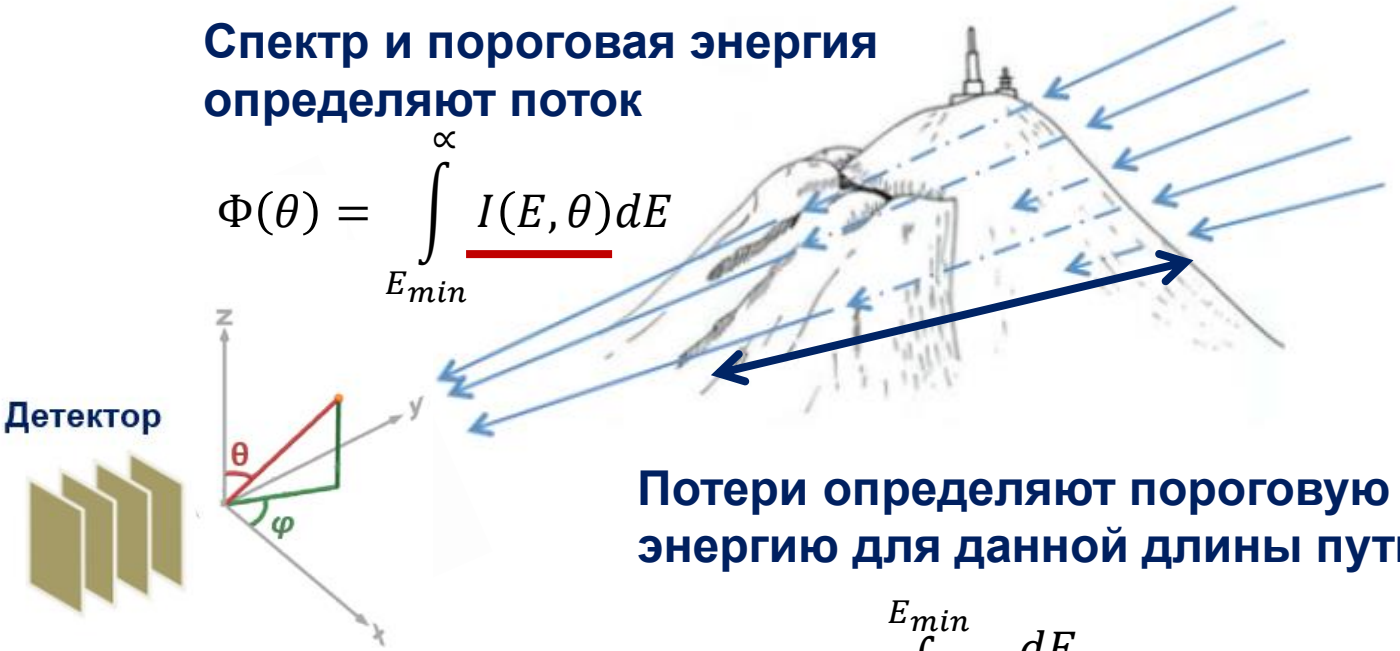
- Восстанавливаемая линейная плотность вещества вдоль траектории частиц напрямую зависит от того, насколько точно известен падающий спектр мюонов

Спектр атмосферных мюонов

$I(E,\theta)$

Спектр и пороговая энергия определяют поток

$$\Phi(\theta) = \int_{E_{min}}^{\propto} I(E,\theta)dE$$



Потери определяют пороговую энергию для данной длины пути

$$L(E_{min}) = \int_0^{E_{min}} \frac{dE}{\frac{dE}{dx}(E)}$$

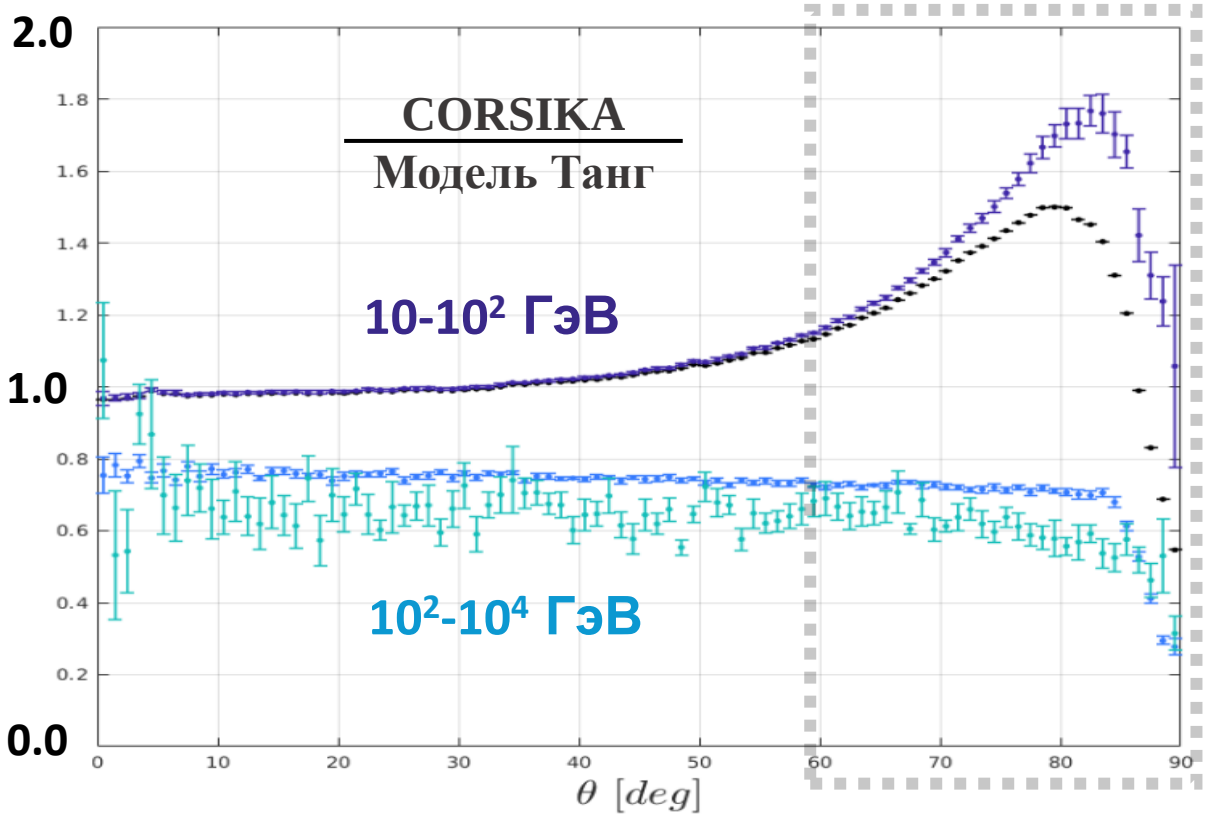
Для мюонографии необходимо точное знание падающего спектра атмосферных мюонов

Проблемы описания спектра окологоризонтальных атмосферных мюонов

1. Экспериментальные измерения спектров окологоризонтальных мюонов опубликованы в разных журналах, в разные годы и представлены в разных форматах.

2. Основные аналитические модели для окологоризонтальных не работают без подгонки.

3. Численная и аналитическая модели расходятся вблизи горизонта.



Cohu, A.; Tramontini, M.; Chevalier, A.; Ianigro, J.-C.; Marteau, J. Atmospheric and Geodesic Controls of Muon Rates: A Numerical Study for Muography Applications. *Instruments* **2022**, *6*, 24. https://doi.org/10.3390/instruments6030024

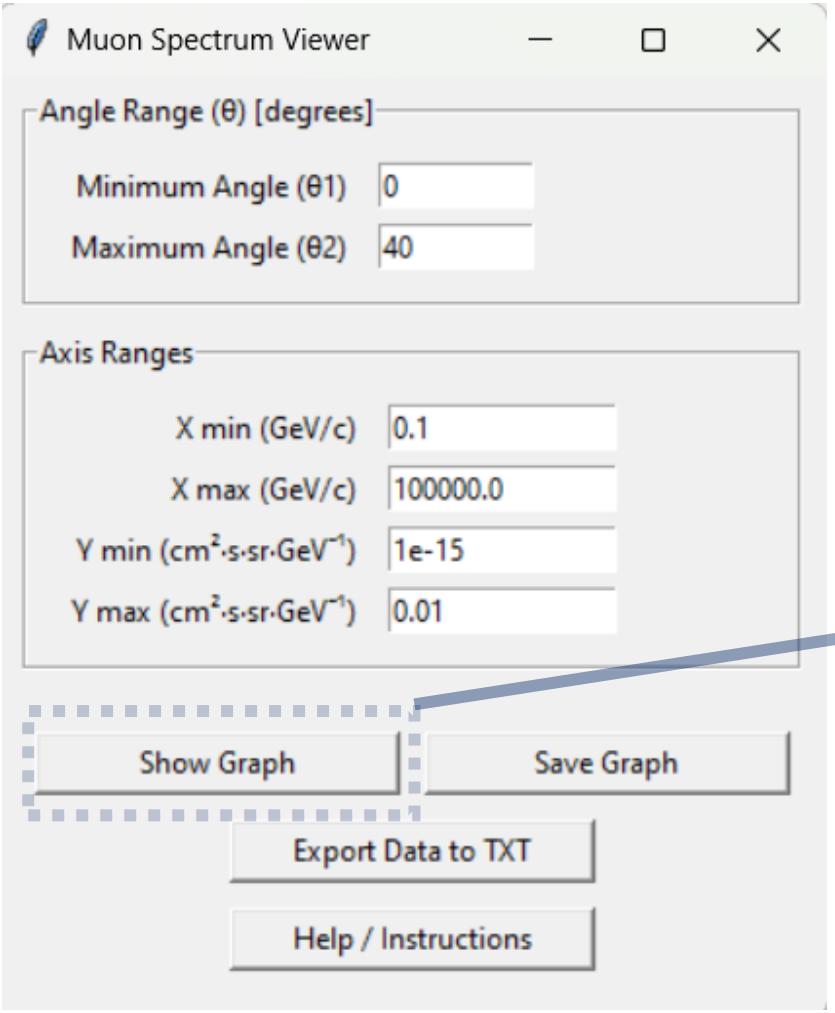
Необходима полная экспериментальная база спектров и надежная аппроксимация

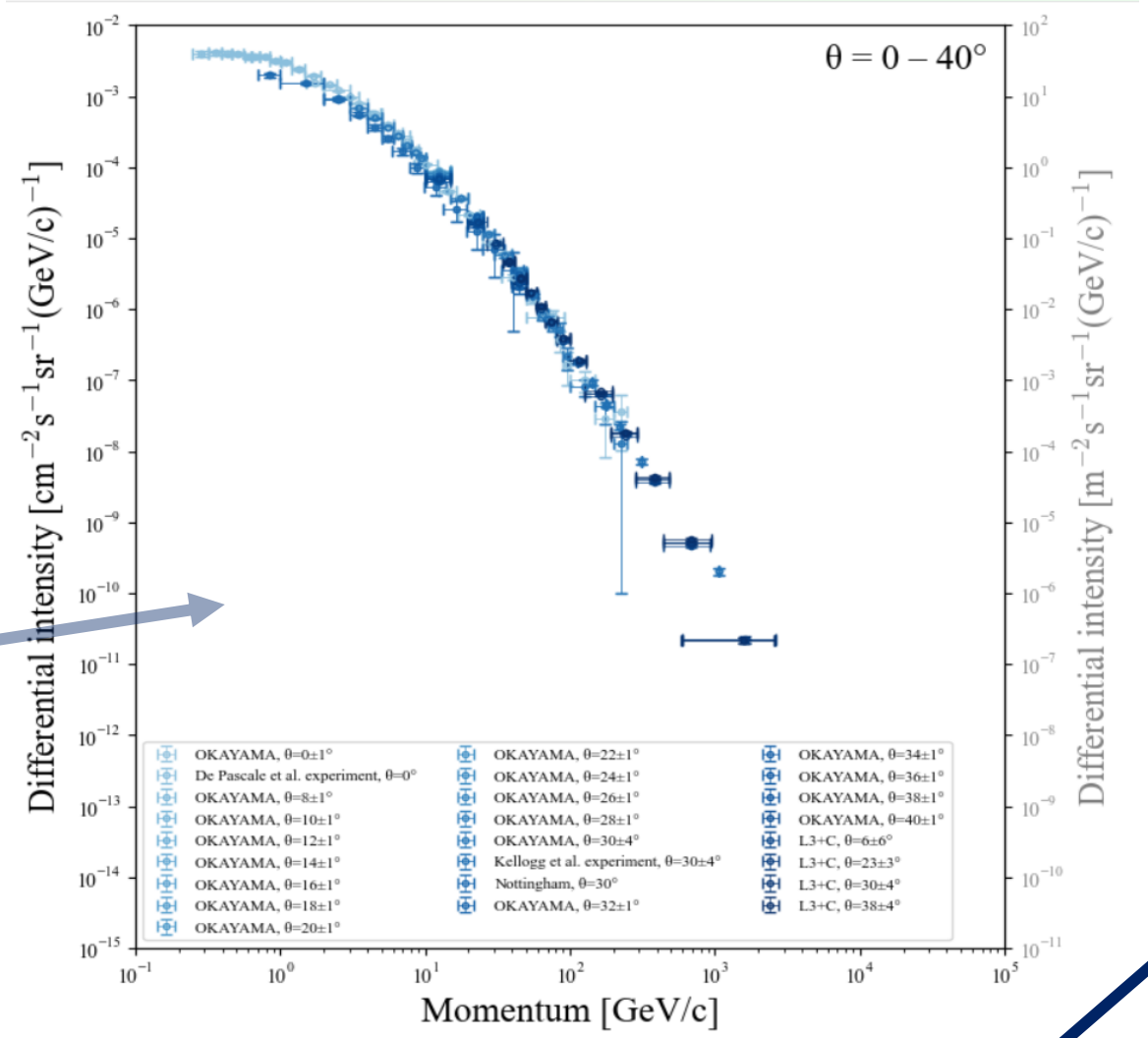
Собрана наиболее полная база экспериментальных спектров мюонов на уровне моря по диапазону больших зенитных углов и импульсов.

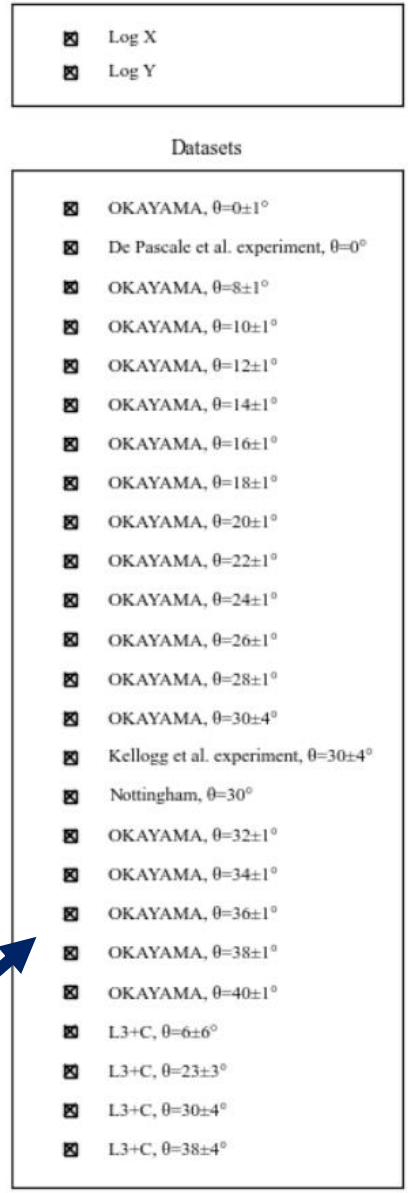
Эксперимент	Импульс, ГэВ/с	Зенитный угол, °	Метод регистрации	Нормировка / уровень
DEIS	10–10000	79-90	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря
MUTRON	100–20000	88±2	Магнито-трековый спектрометр и калориметр	Уровень моря
AMH	1–100	58-86	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря
Kiel-DESY	1–1000	75±7	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря
OKAYAMA	1.5–250	0-81	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря
De Pascale	0.2–100	0	Сверхпроводящий магнитный спектрометр	600 м. над уровнем моря
Kellogg	50–1700	30, 75	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря
L3+C	20–3000	0-58	Магнито-трековый спектрометр	30 м под землей
Nottingham	1–50	30, 45, 60	Магнито-трековый спектрометр	Уровень моря

SQLite (1209 точек, 69 наборов)

Разработано удобное приложение для работы с базой данных







Основные функции: построение графика для выбранного углового диапазона; сохранение графика в формате SVG; выгрузка отфильтрованных данных в текстовый файл;

Выбор визуализации конкретных экспериментов

Параметризации - обзор

•**Гайссер (Gaisser)** - базовая модель из свертки степенного спектра ПКЛ с π/K-каналами.

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_G \cdot \left(\frac{E_\mu}{ГэВ}\right)^{-\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1+\frac{E_\mu \cdot cos\theta}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{E_\mu \cdot cos\theta}{\varepsilon_K}}\right]$$

•**Танг (Tang)** - модификация Гайссера: учет кривизны Земли (cosθ*) и потерь энергии.

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_T \cdot \left(\frac{E_\mu}{ГэВ}\right)^{-\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1+\frac{1.1 \cdot \widetilde{E}_\mu \cdot cos\theta^*}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{1.1 \cdot \widetilde{E}_\mu \cdot cos\theta^*}{\varepsilon_K}} + r_c\right]$$

•**Шукла (Shukla)** – полу-эмпирический модифицированный степенной закон с угловым множителем D(θ) для сферической Земли.

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = I_0 \cdot N \cdot (E_0 + E_\mu)^{-n} \cdot \left(1 + \frac{E_\mu}{\varepsilon}\right)^{-1} \cdot D(\theta)^{-(n-1)}$$

•**Рейна (Reyna)** - универсальное масштабирование спектра по ζ = p·cosθ.

$$I_V(p_\mu) = A \cdot p_\mu^{-(a_0 + a_1 \cdot \lg(p_\mu) + a_2 \cdot (\lg(p_\mu))^2 + a_3 \cdot (\lg(p_\mu))^3)}$$

Ни одна из моделей с опубликованными параметрами не работает для больших зенитных углов

Модель Гайссера

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_G \cdot \left(\frac{E_\mu}{ГэВ}\right)^{-\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1+\frac{E_\mu \cdot cos\theta}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{E_\mu \cdot cos\theta}{\varepsilon_K}}\right]$$

Получены новые коэффициенты:

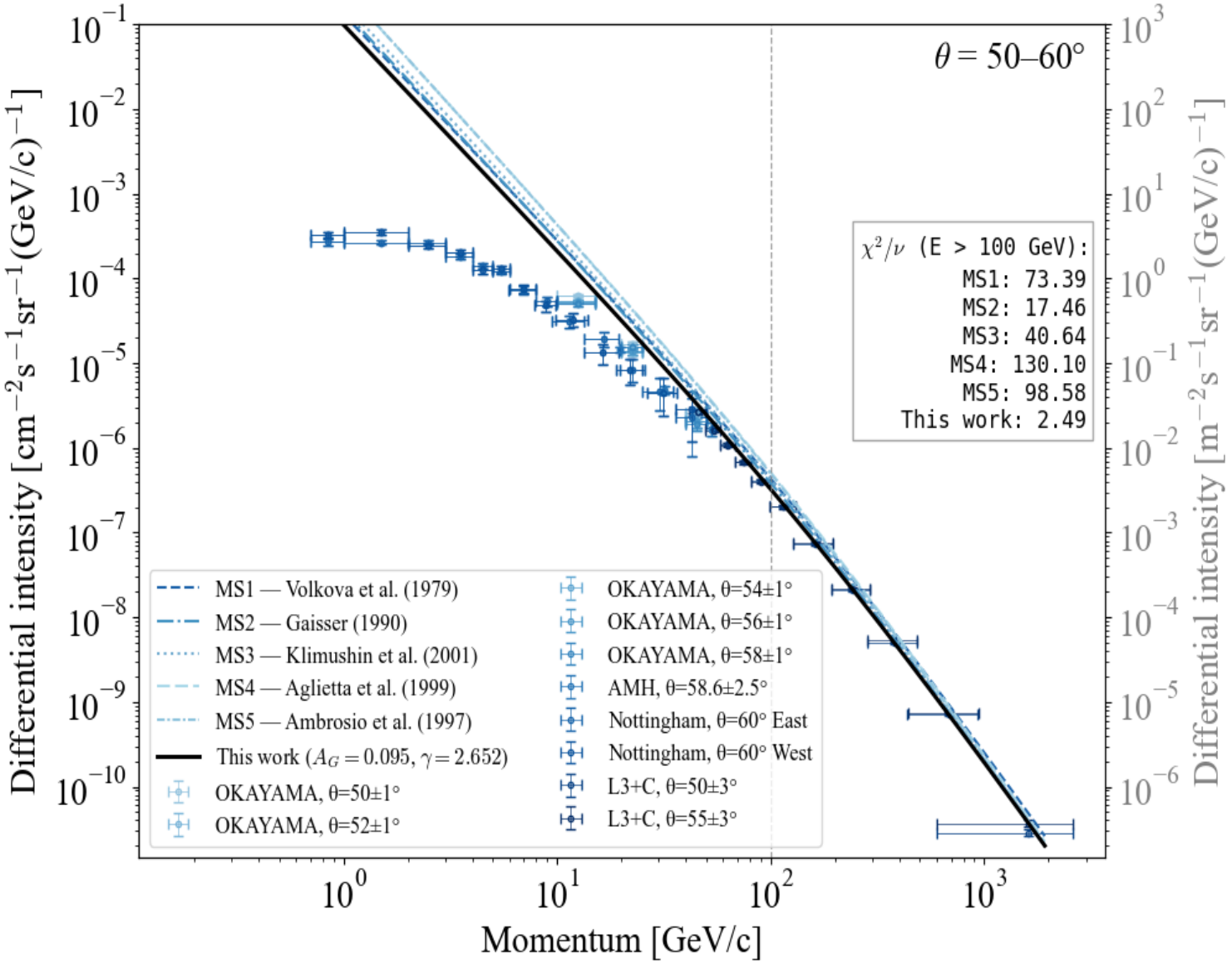
$$\gamma = 2.6523 \pm 0.0075$$

$$A_G = (9.4907 \pm 0.4026) \cdot 10^{-2}$$

Новые коэффициенты немного расширили область применимости:

$$\theta < 70°$$

$$E_\mu > 50\ ГэВ$$



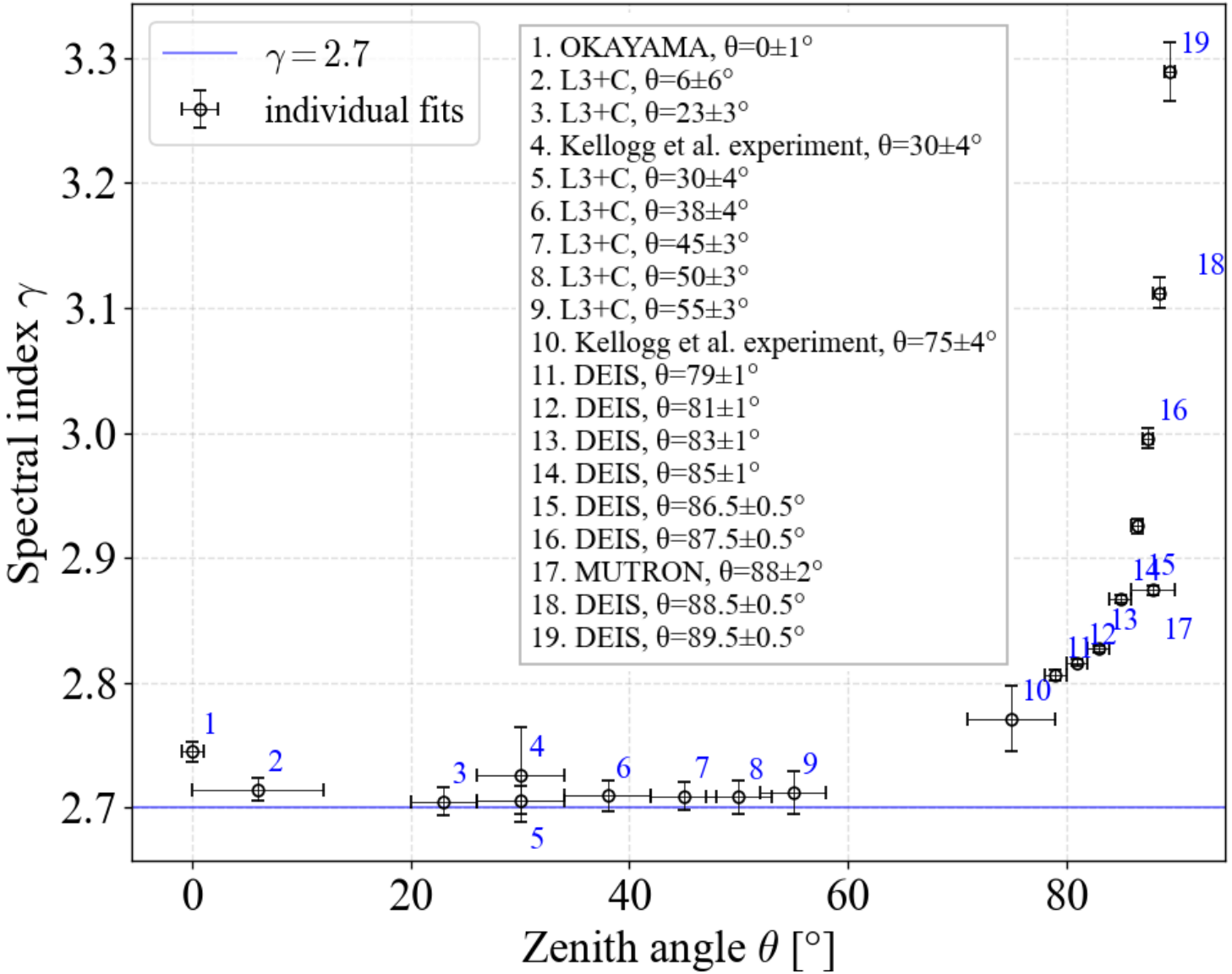
Наша аппроксимация дает наименьший χ² во всей допустимой области по сравнению с параметрами других авторов

Модель Танга

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_T \cdot \left(\frac{E_\mu}{ГэВ}\right)^{-\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1+\frac{1.1\cdot\tilde{E}_\mu\cdot cos\theta^*}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{1.1\cdot\tilde{E}_\mu\cdot cos\theta^*}{\varepsilon_K}} + r_c\right]$$

-Опубликованные параметры описывают спектр только до θ < 75°;

- Вблизи горизонта (θ > 75°) подобрали коэффициенты по нашей базе.



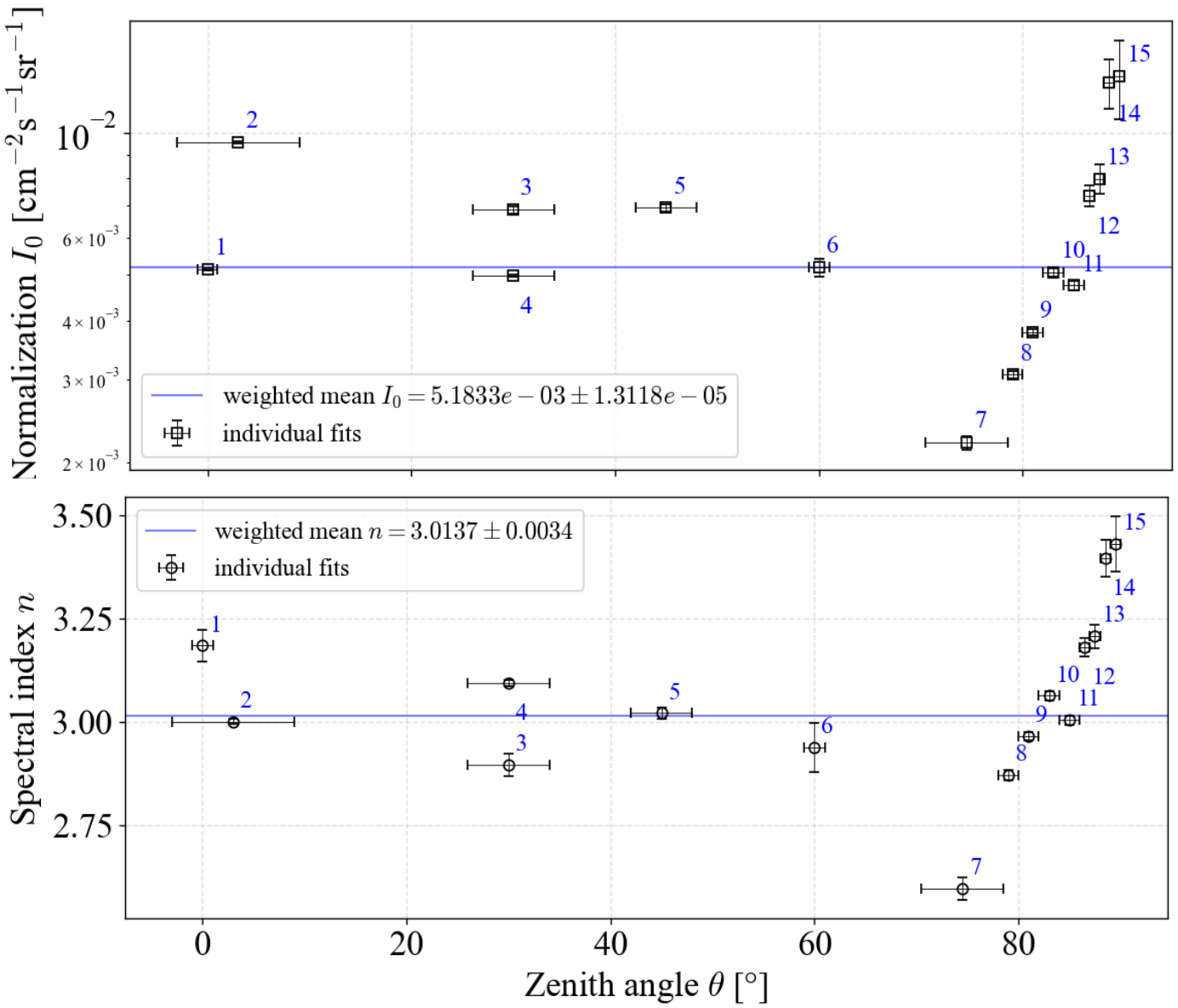
Вблизи горизонта параметры сильно зависят от угла θ

Модель Шукла

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = I_0 \cdot N \cdot \left(E_0 + E_\mu\right)^{-n} \cdot \left(1 + \frac{E_\mu}{\varepsilon}\right)^{-1} \cdot D(\theta)^{-(n-1)}$$

- Вблизи горизонта (θ > 75°) подобрали коэффициенты по нашей базе.

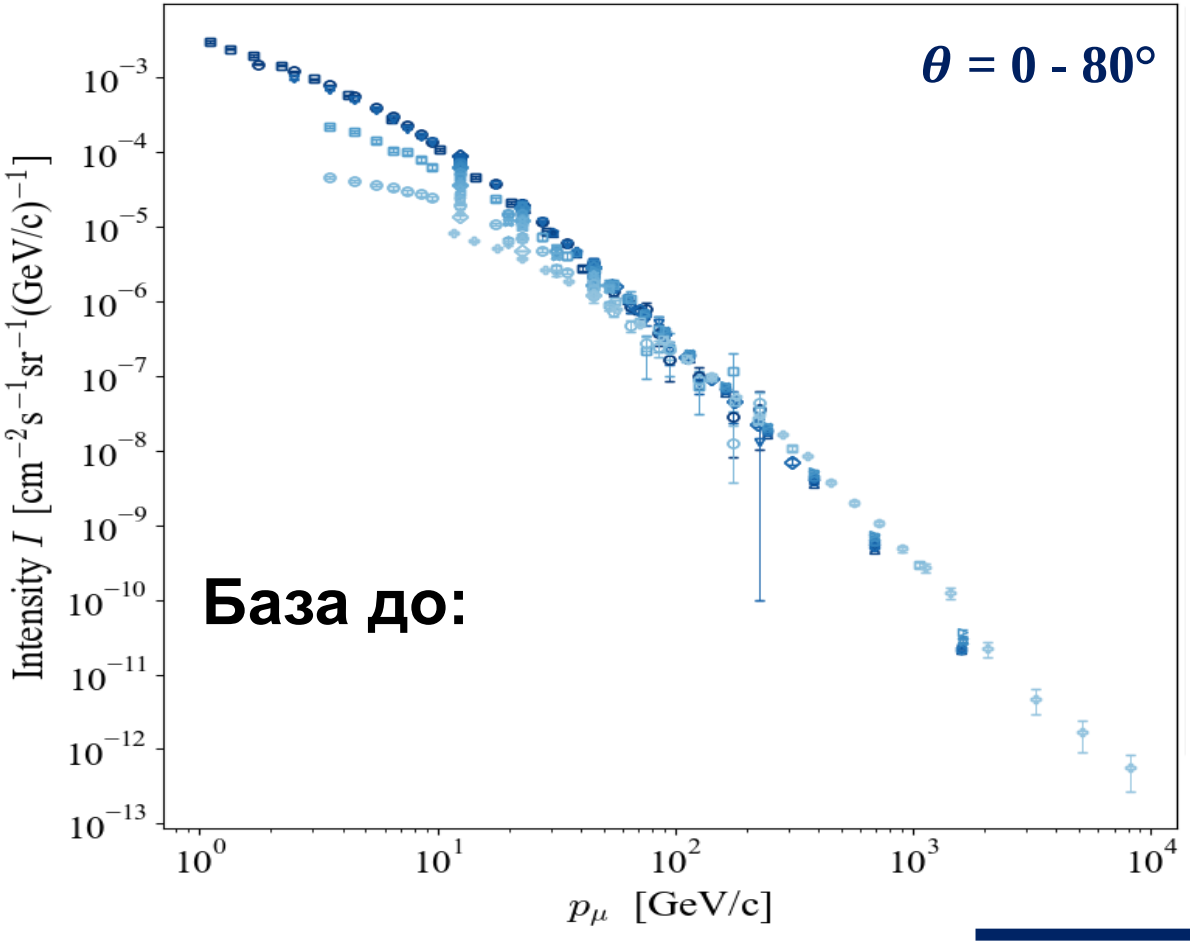
1. OKAYAMA, θ=0±1°
2. De Pascale et al. experiment, θ=0° + L3+C, θ=6±6°
3. Nottingham, θ=30° + Kellogg et al. experiment, θ=30±4°
4. OKAYAMA, θ=30±4° + L3+C, θ=30±4°
5. Nottingham, θ=45° + L3+C, θ=45±3°
6. OKAYAMA, θ=60±1°
7. OKAYAMA, θ=74±1° + Kellogg et al. experiment, θ=75±4°
8. DEIS, θ=79±1°
9. DEIS, θ=81±1°
10. DEIS, θ=83±1°
11. DEIS, θ=85±1°
12. DEIS, θ=86.5±0.5°
13. DEIS, θ=87.5±0.5°
14. DEIS, θ=88.5±0.5°
15. DEIS, θ=89.5±0.5°

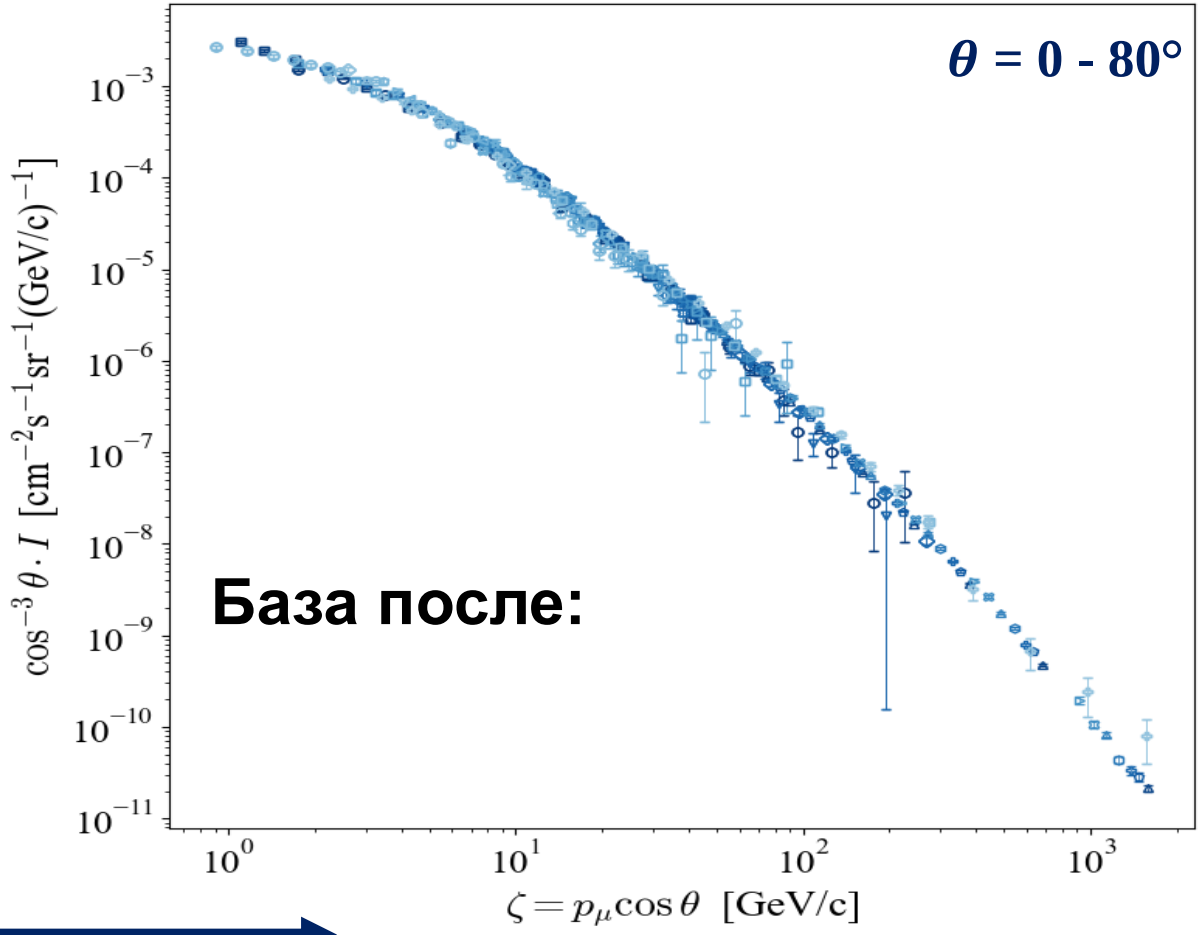


Вблизи горизонта параметры сильно зависят от угла θ

Модель Рейна

Приведение угловых спектров к вертикальному через ζ и cos³θ.

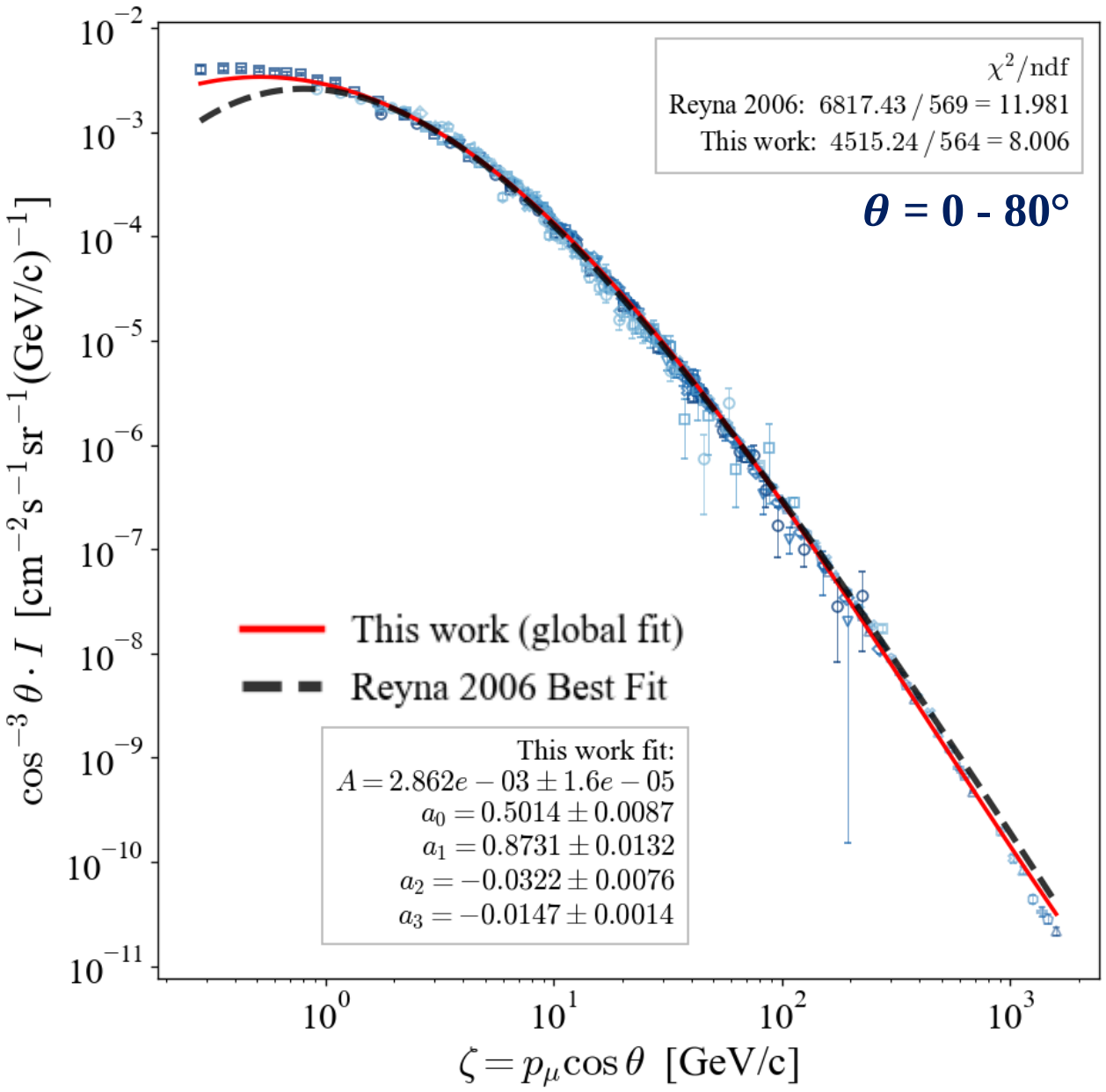




$$\frac{dI_\mu}{dp_\mu} = \cos^3\theta \cdot I_{\mu,V}(\zeta); \quad \zeta = p_\mu \cdot \cos\theta$$

Масштабирование работает при θ = 0 - 80°

Модель Рейна



Модель Рейна была пересмотрена на расширенном наборе экспериментальных данных.

$$\frac{dI_\mu}{dp_\mu} = \cos^3\theta \cdot I_{\mu,V}(\zeta); \quad \zeta = p_\mu \cdot \cos\theta$$

Выполнена полиномиальная аппроксимация всех данных при θ = 0 - 80°, получены новые коэффициенты.

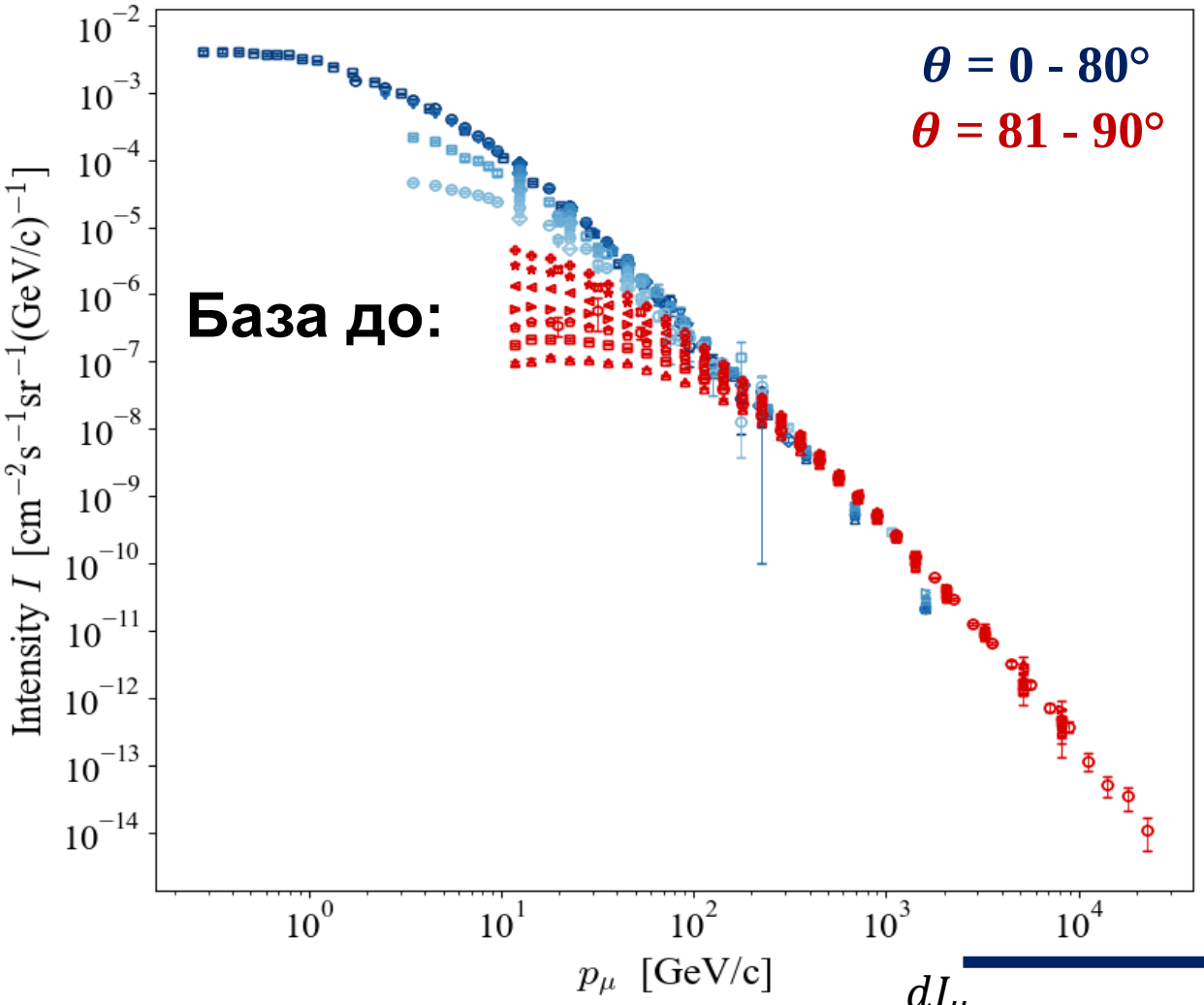
$$I_V(p_\mu) = A \cdot p_\mu^{-(a_0 + a_1 \cdot \lg(p_\mu) + a_2 \cdot (\lg(p_\mu))^2 + a_3 \cdot (\lg(p_\mu))^3)}$$

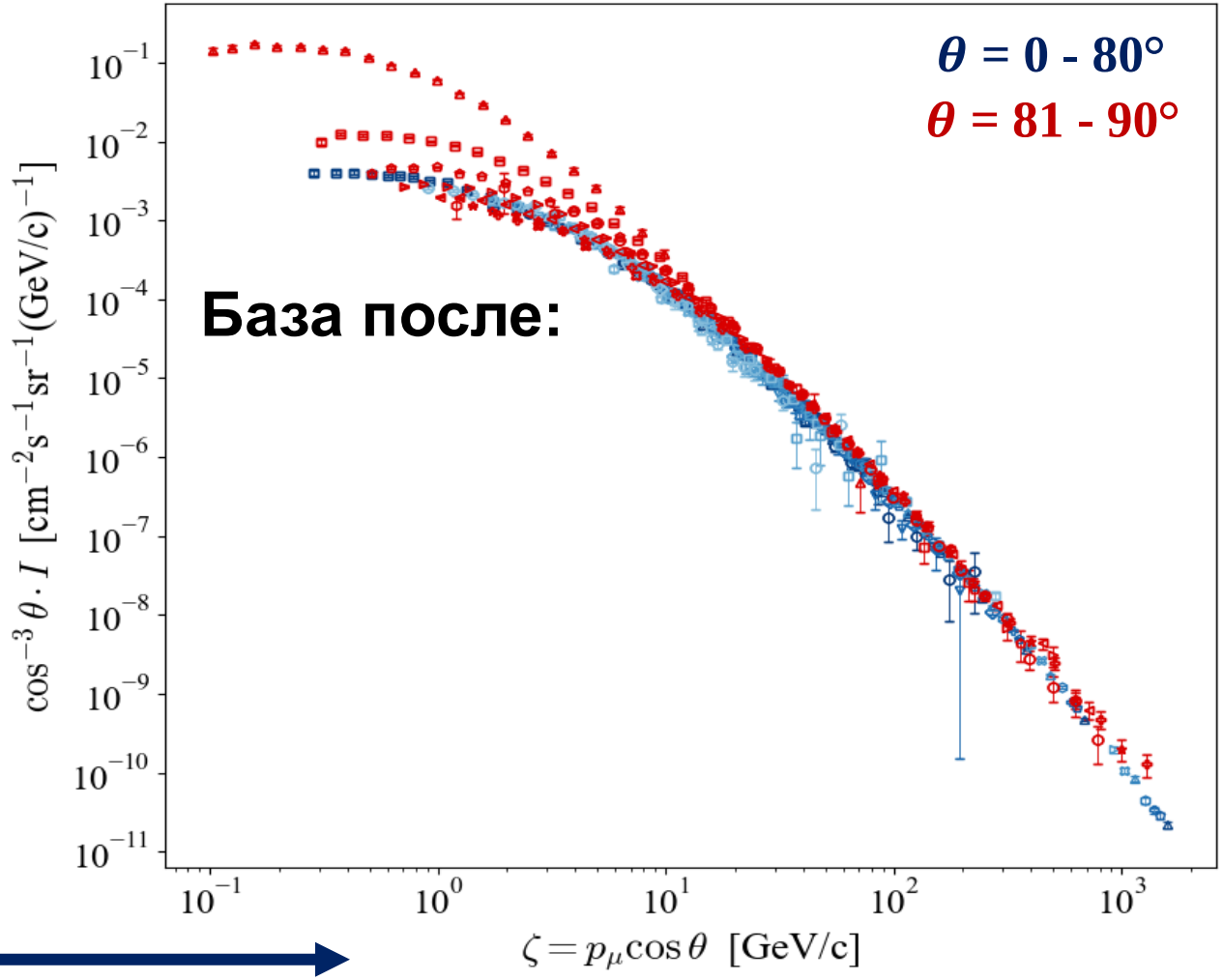
Полином Бугаева

Модель хорошо описывает данные при θ = 0 - 80°

Модель Рейна

Проверена применимость масштабирования при больших зенитных углах.





$$\frac{dI_\mu}{dp_\mu} = \cos^3\theta \cdot I_{\mu,V}(\zeta); \quad \zeta = p_\mu \cdot \cos\theta$$

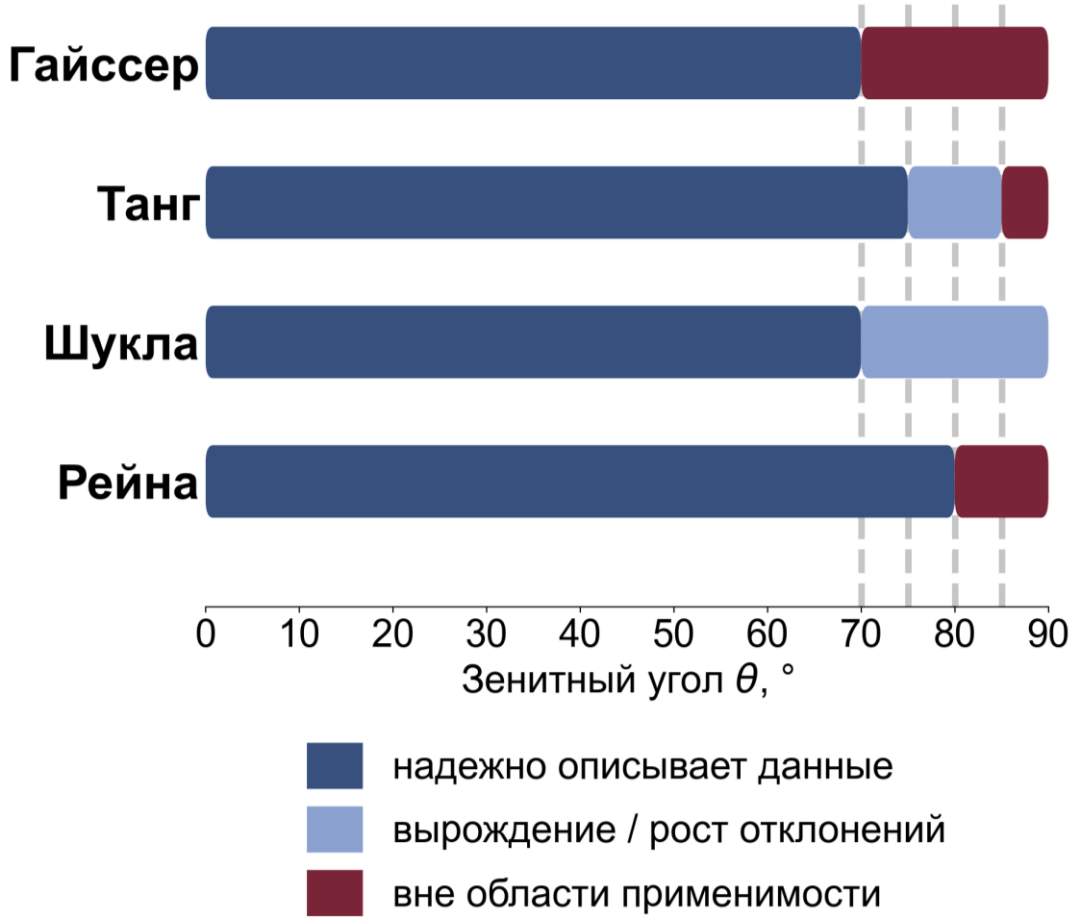
Масштабирование не работает при θ > 80°

Применимость моделей

Вблизи горизонта стандартные константы не работают - все 4 модели с фиксированными параметрами теряют точность при θ > 70°.

Параметры - функция угла, а не константы - на нашей базе приходится подбирать как p(θ), а не брать универсальными.

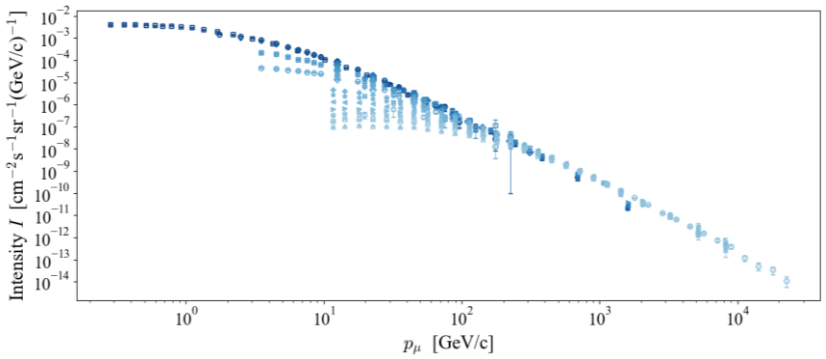
Ни одна существующая параметризация не описывает окологоризонтальные мюоны единым набором параметров.



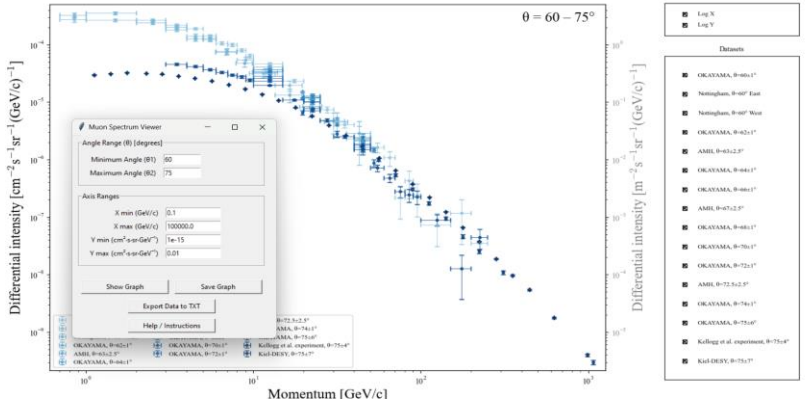
Приемлемая точность у горизонта достигается только при угловой зависимости параметров

Заключение

1. Собрана наиболее полная на сегодня база экспериментальных данных по спектрам атмосферных мюонов на уровне моря.

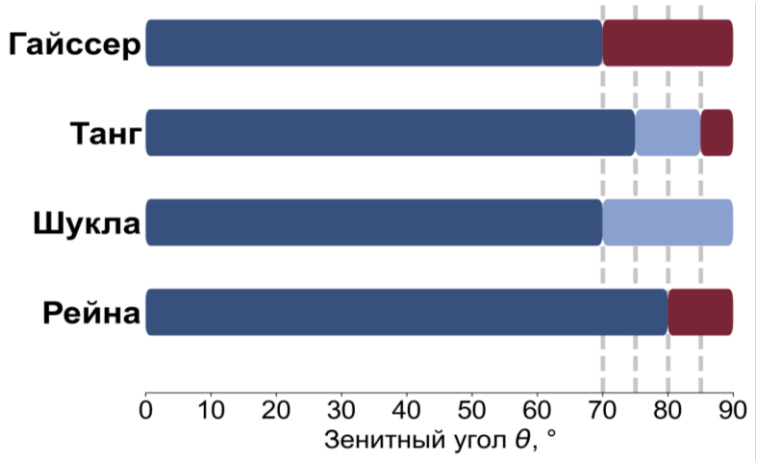


2. Реализован графический интерфейс для работы с базой: построение и сохранение графика для выбранного углового диапазона; выгрузка отфильтрованных данных в текстовый файл.



3. Показано, что вблизи горизонта применимость существующих моделей нарушается - фиксированные параметры перестают описывать данные.

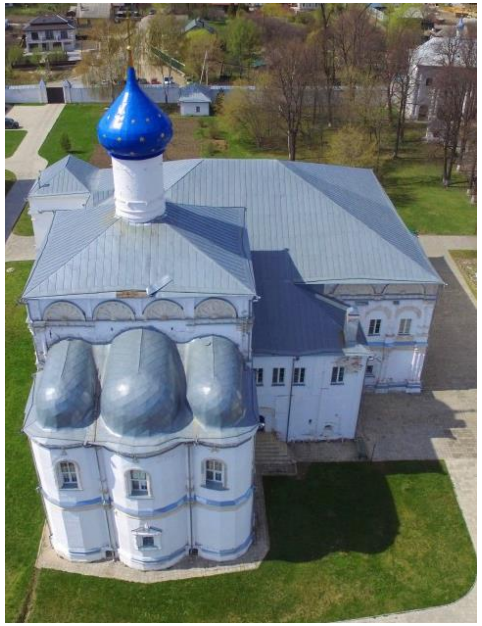
4. Подбор параметров под каждый угол снимает ограничение стандартных моделей и продлевает их применимость вплоть до горизонта.



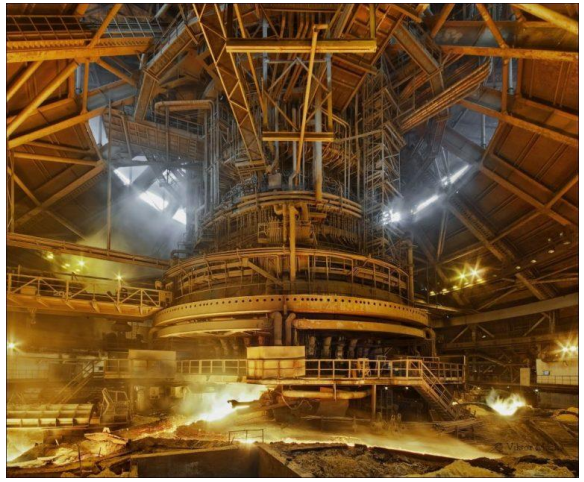
Дополнительные слайды

Возможные объекты и практическое применение технологии

Объекты культурного наследия



Ядерные реакторы



Мосты, дамбы

Залежи полезных ископаемых

Подземные пустоты

Вулканы

Протяжённые объекты до метров до километров, имеющие неоднородности плотности

Единицы и перевод

$$1\ \mathrm{m.w.e.} = 1\ \mathrm{m\ H_2O} = 100\ \mathrm{g/cm^2}$$

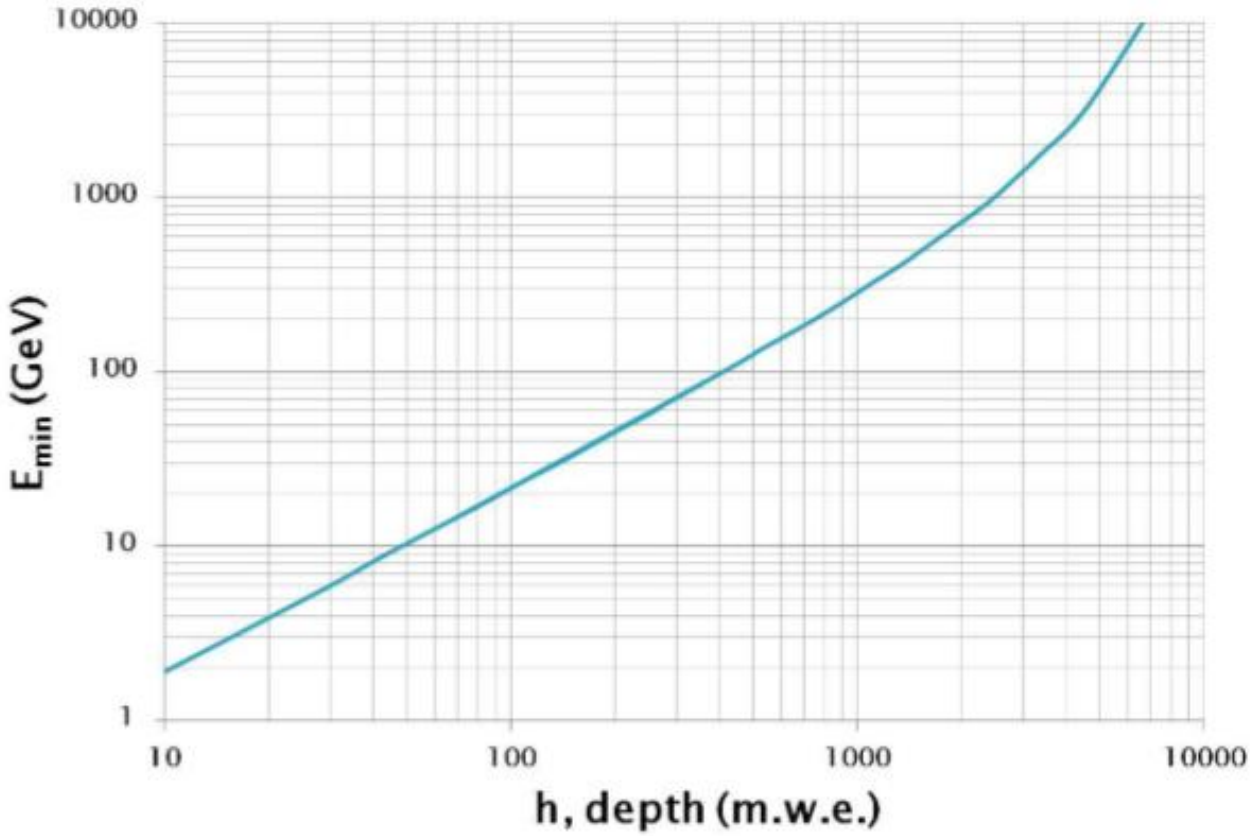
Плотность воды = 1 г/см³, поэтому м.в.э. и г/см² различаются лишь множителем 100.

Перевод: 1 м.в.э. - реальная длина

Материал	ρ, г/см³	1 м.в.э.
Вода	1.00	1.00 м
Бетон	2.30	0.43 м
Станд. порода	2.65	0.38 м
Железо	7.84	0.13 м

Пример: гора ~221 м из породы 2.65
221 × 2.65 ≈ 586 м.в.э.

h (м.в.э.) = L (м) × ρ (г/см³)



Первичные космические лучи (ПКЛ)

Состав потока на верхней границе атмосферы:

~87%	~12%	~1%
протоны (p)	ядра He	тяжёлые ядра, e^-

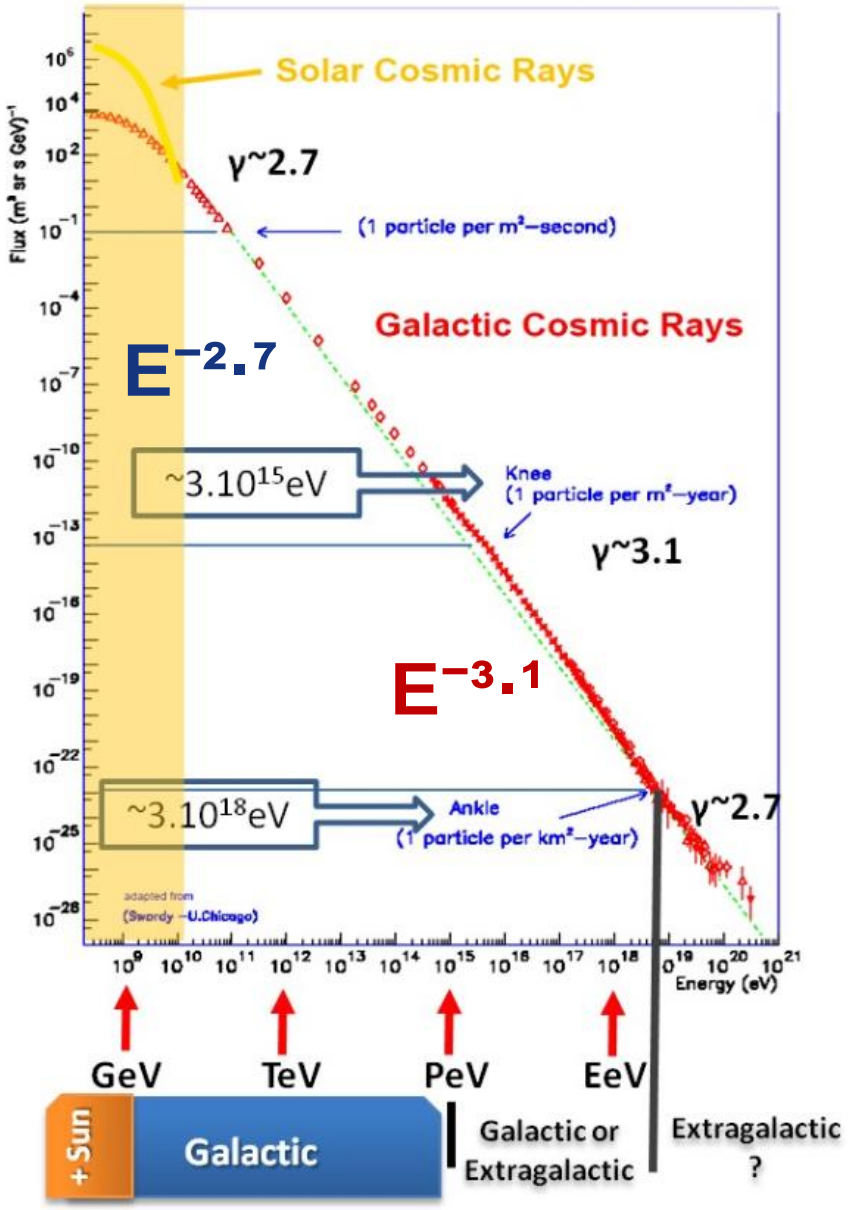
- Высокоэнергетические заряженные частицы галактического (в основном) и солнечного происхождения.
- Энергетический спектр в широком диапазоне описывается степенным законом:

$$\frac{dN}{dE} \propto E^{-2.7} \quad (E < E_{knee}), \qquad E^{-3.1} \quad (E > E_{knee})$$

$$E_{knee} \approx 3 \times 10^{15}\ \text{eV}, \qquad E_{ankle} \approx 10^{18}\ \text{eV}$$

- «Колено» (knee) — излом спектра; «лодыжка» (ankle) — переход к внегалактической компоненте.
- **Именно ПКЛ инициируют адронные каскады, в которых рождаются атмосферные мюоны.**

Стандартный степенной спектр ПКЛ ($\propto E^{-2.7}$) — исходная «форма», которая переносится в спектр вторичных мюонов.



Образование мюонов в атмосфере

- ПКЛ взаимодействуют с ядрами атомов стратосферы, порождая адронный каскад (атмосферный ливень).
- **Основной источник мюонов — двухчастичные распады заряженных π- и K-мезонов:**

$$\pi^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) \quad \sim 100\% \qquad K^{\pm} \to \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}) \quad \sim 63.6\%$$

Эволюция потоков описывается системой каскадных уравнений переноса:

$$\frac{dN_i(E,X)}{dX} = -\left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{d_i}\right) N_i(E,X) + \sum_j \int N_j(E_j)\, F_{ij}(E_j, E_i)\, dE_j$$

Распад или взаимодействие **источник**

1 Высота рождения

пионы/каоны рождаются на 15-26 км; распад в мюоны - на 10-15 км

2 Средняя энергия

средняя энергия мюонов на уровне моря ≈ 4 ГэВ

3 Конкуренция

судьба мезона: распад (→ μ) либо взаимодействие с ядром воздуха

Мюоны - лептоны: не участвуют в сильных взаимодействиях и слабо тормозятся, поэтому доминируют во вторичном потоке у поверхности.

Распад или взаимодействие: критическая энергия

Вероятность мезона распасться (а не провзаимодействовать) зависит от его энергии и плотности среды:

$$\varepsilon_i = \frac{m_i\, c\, h_0}{\tau_i} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_\pi \approx 115\ \mathrm{GeV}, \quad \varepsilon_K \approx 850\ \mathrm{GeV}$$

$$\frac{1}{d_i} = \frac{\varepsilon_i}{E \cdot \mathrm{X} \cdot \cos\theta}$$

$$P_{i,\,decay} = \frac{1/d_i}{1/d_i + 1/\lambda_i} \approx \frac{1}{1 + \frac{E\cos\theta}{\varepsilon_i}}$$

λ_i - длина взаимодействия частицы типа i, характеризующая вероятность ее столкновения с ядрами воздуха; d_i - длина распада частицы типа i, учитывающая вероятность ее распада;

E ≪ ε

- доминирует распад мезона,
- мезон успевает распасться и рождается мюон,
- характерно для малых энергий и больших cos θ.

E ≫ ε

- распад подавлен,
- мезон чаще взаимодействует с ядром воздуха,
- появляется «завал» спектра при высоких энергиях.

Критические энергии задают форму спектра и его зависимость от зенитного угла θ.

Потери энергии мюона:

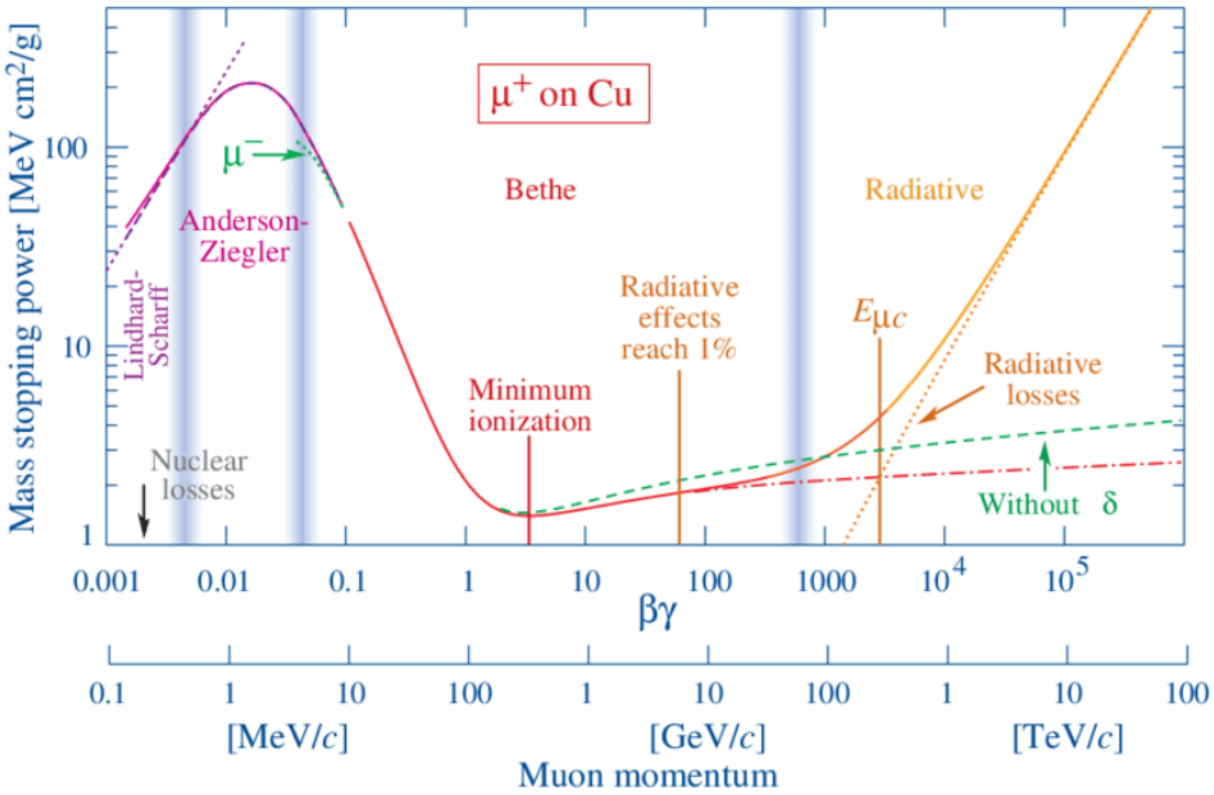
$$-\frac{dE}{dx} = a(E) + b(E)\,E, \qquad b = b_{brems} + b_{pair} + b_{photonucl}$$

a(E) — ионизация

Почти постоянна, ≈ 2 МэВ·см²/г (минимально ионизирующая частица). Доминирует при низких и средних энергиях.

b(E)·E — радиационные

Тормозное излучение + рождение e^+e^- пар + фотоядерные. Растут с E.



Связь с мюонографией:

$$L(E_{min}) = \int_0^{E_{min}} \frac{dE}{\frac{dE}{dx}(E)} \qquad F(\theta) = \int_{E_{min}}^{\infty} I(E,\theta)\,dE$$

Потери определяют пороговую энергию Emin, нужную для прохождения данной длины пути в веществе.

Спектр и пороговая энергия задают регистрируемый поток F(θ); по его ослаблению восстанавливают плотность объекта.

Высокая проникающая способность мюонов (сотни метров плотного вещества) - физическая основа мюонографии.

Модель Гайссера (Gaisser)

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_G \left(\frac{E_\mu}{\mathrm{GeV}}\right)^{-\gamma} \left[\frac{1}{1+\frac{E_\mu \cos\theta}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{E_\mu \cos\theta}{\varepsilon_K}}\right]$$

Происхождение и приближения

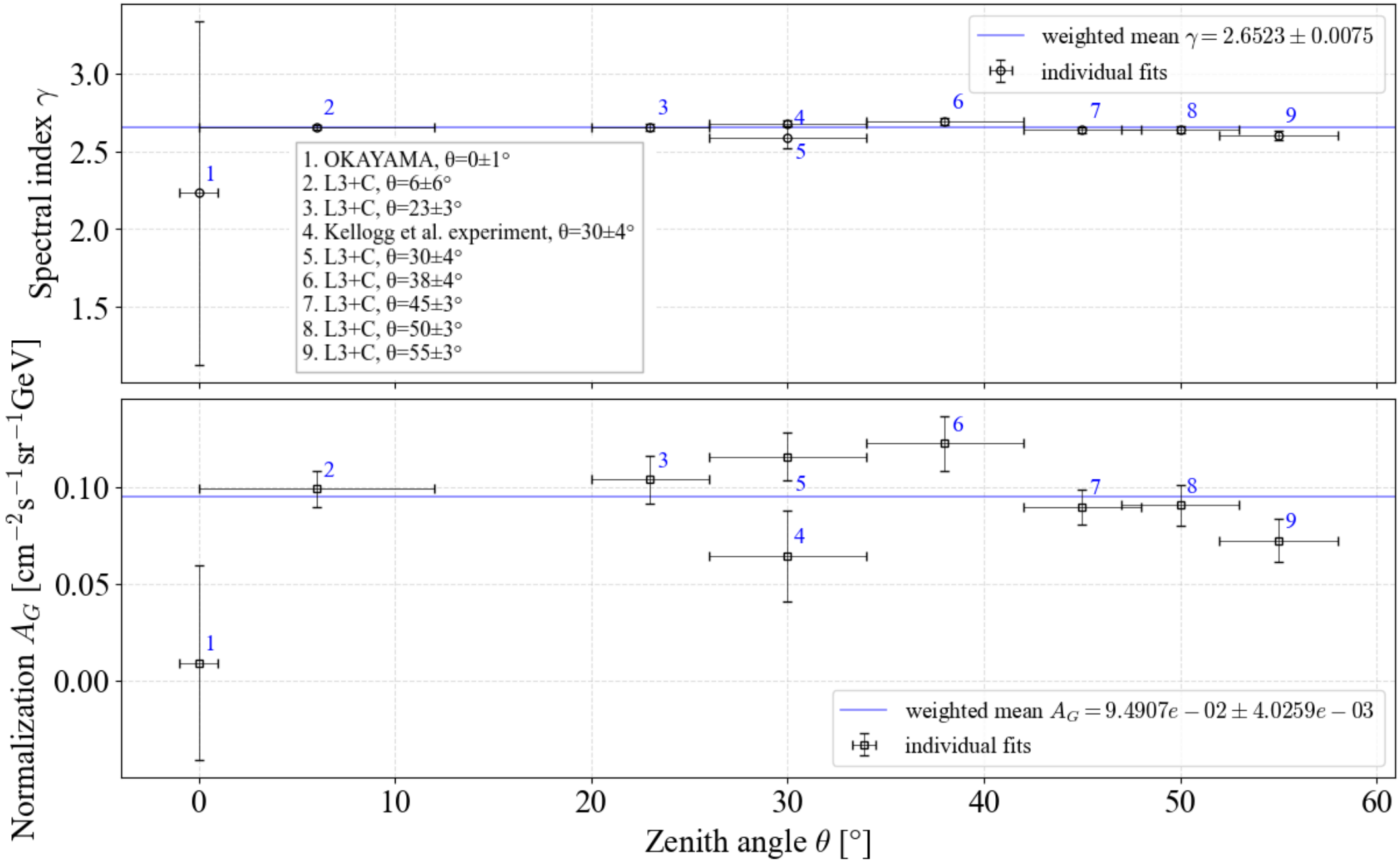
-Свертка степенного спектра ПКЛ ($\propto E^{-2.7}$) с π- и K-каналами распада.

-Плоская Земля ($\theta < 70°$), пренебрежение потерями энергии мюонов.

-Факторизация потока по энергии и глубине - методом разделения переменых, независимо рассматривать энергетический спектр и глубинную эволюцию.

-Скейлинг-приближение (scaling) - спектры вторичных частиц считаются сохраняющими форму при изменении энергии, а энергетическая зависимость задается степенным законом

Зависимость спектрального индекса и нормировочной константы от зенитного угла (Gaisser)



Модель Танг (Tang)

Модификация Гайссера

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_T\left(\frac{E_\mu}{\mathrm{GeV}}\right)^{-\gamma}\left[\frac{1}{1+\frac{1.1\,\tilde{E}_\mu\cos\theta^*}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{1.1\,\tilde{E}_\mu\cos\theta^*}{\varepsilon_K}}\right] + r_c$$

$$\tilde{E}_\mu = E_\mu + \Delta, \quad \Delta = 2.06\times10^{-3}\left(\frac{h_F}{\cos\theta^*} - \lambda_N\right), \quad h_F \approx 950, \ \lambda_N \approx 90\ \mathrm{g/cm^2}$$

1 Высокие E

*E_μ > 100/cos θ**

формула Гайссера

2 Средние E

1/cos θ < E_μ < 100/cos θ**

формула с подстановкой

3 Низкие E

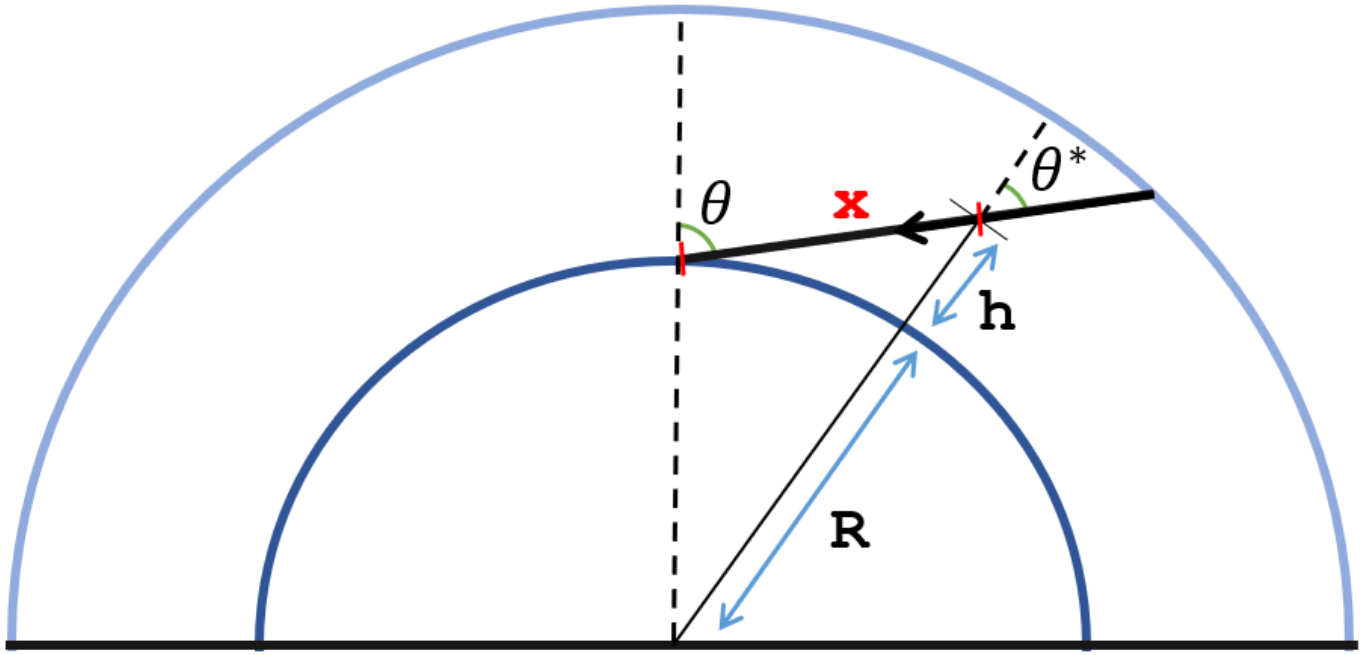
*E_μ < 1/cos θ**

доп. подстановка для распада мюонов

$$\mathrm{E}_\mu \rightarrow \frac{3\cdot\mathrm{E}_\mu + 7/cos\theta^*}{10}$$

θ* - эффективный угол рождения мюона в верхней атмосфере (сферическая Земля); Δ - поправка на потери энергии.

Модель Танг (Tang)



Поскольку Земля имеет сферическую форму, зенитный угол θ, измеренный на поверхности, отличается от зенитного угла θ*, под которым мюон рождался в атмосфере.

При θ > 70° кривизна Земли становится значимой и пренебрежение ею приводит к систематическому завышению расчетного потока мюонов.

С помощью пакета моделирования атмосферных ливней CORSIKA:

$$cos\theta^* = \sqrt{\frac{\cos^2\theta + p_1^2 + p_2 \cdot \cos^{p_3}\theta + p_4 \cdot \cos^{p_5}\theta}{1 + p_1^2 + p_2 + p_4}}$$

$p_1 = 0{,}102573;$
$p_2 = -0{,}068287;$
$p_3 = 0{,}958633;$
$p_4 = 0{,}040725;$
$p_5 = 0{,}817285$

Модель Танг (Tang)

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = A_T \cdot \left(\frac{E_\mu}{ГэВ}\right)^{-\gamma} \cdot \left[\frac{1}{1+\frac{1.1\cdot\tilde{E}_\mu\cdot cos\theta^*}{\varepsilon_\pi}} + \frac{0.054}{1+\frac{1.1\cdot\tilde{E}_\mu\cdot cos\theta^*}{\varepsilon_K}} + r_c\right] \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{E}_\mu &= E_\mu + \Delta; \\ \Delta &= 2.06\cdot 10^{-3}\cdot X; \\ X &= \frac{h_F}{cos\theta^*} - \lambda_N \\ A &= 1.1\left(\frac{\lambda_N\sqrt{cos\theta + 0.001}}{1030}\right)^{\frac{1.04}{(E_\mu+\Delta/2)\cdot cos\theta^*}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где X – средняя толща атмосферы через которую проходит мюон (г.см$^{-2}$);

$h_F \approx 950$ г.см$^{-2}$ – эффективная высота атмосферы;

$\lambda_N \approx 90$ г.см$^{-2}$ – средняя длина взаимодействия протона с атмосферой.

$$E_\mu \rightarrow \frac{3\cdot E_\mu + 7/cos\theta^*}{10} \quad (3)$$

1. Высокие энергии E_μ >100/ $cos\theta^*$ ГэВ – формула Гайссера
2. Средние энергии 1/ $cos\theta^*$ <E_μ<100/ $cos\theta^*$ ГэВ – формула (1) с подстановкой (2)
3. Низкие энергии E_μ <1/ $cos\theta^*$ - формула (1) с подстановкой (2) и дополнительной подстановкой (3)

Модель Танг (Tang)

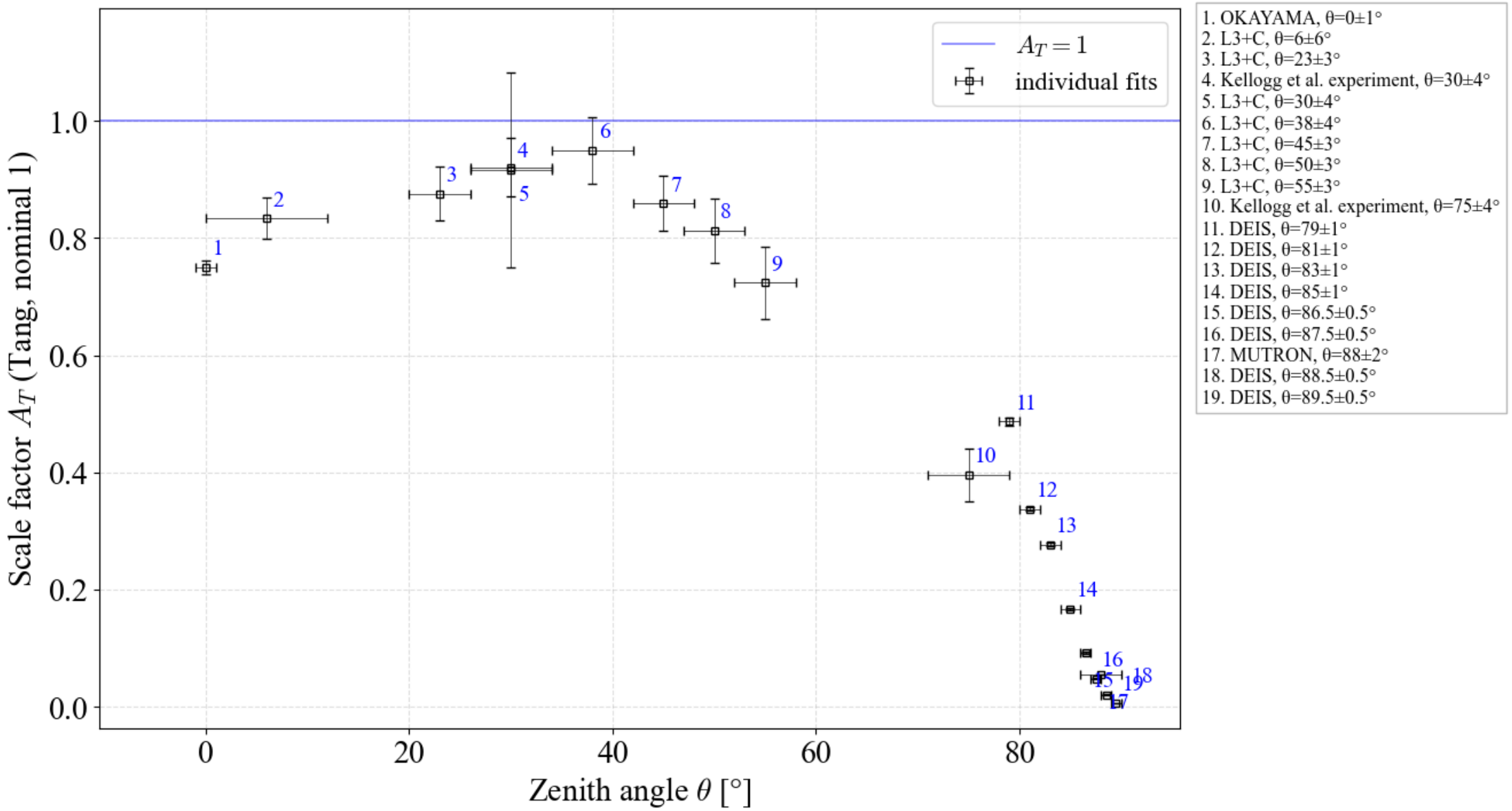


Рис. 6 – Зависимость A_T от зенитного угла θ

Модель Танг (Tang)

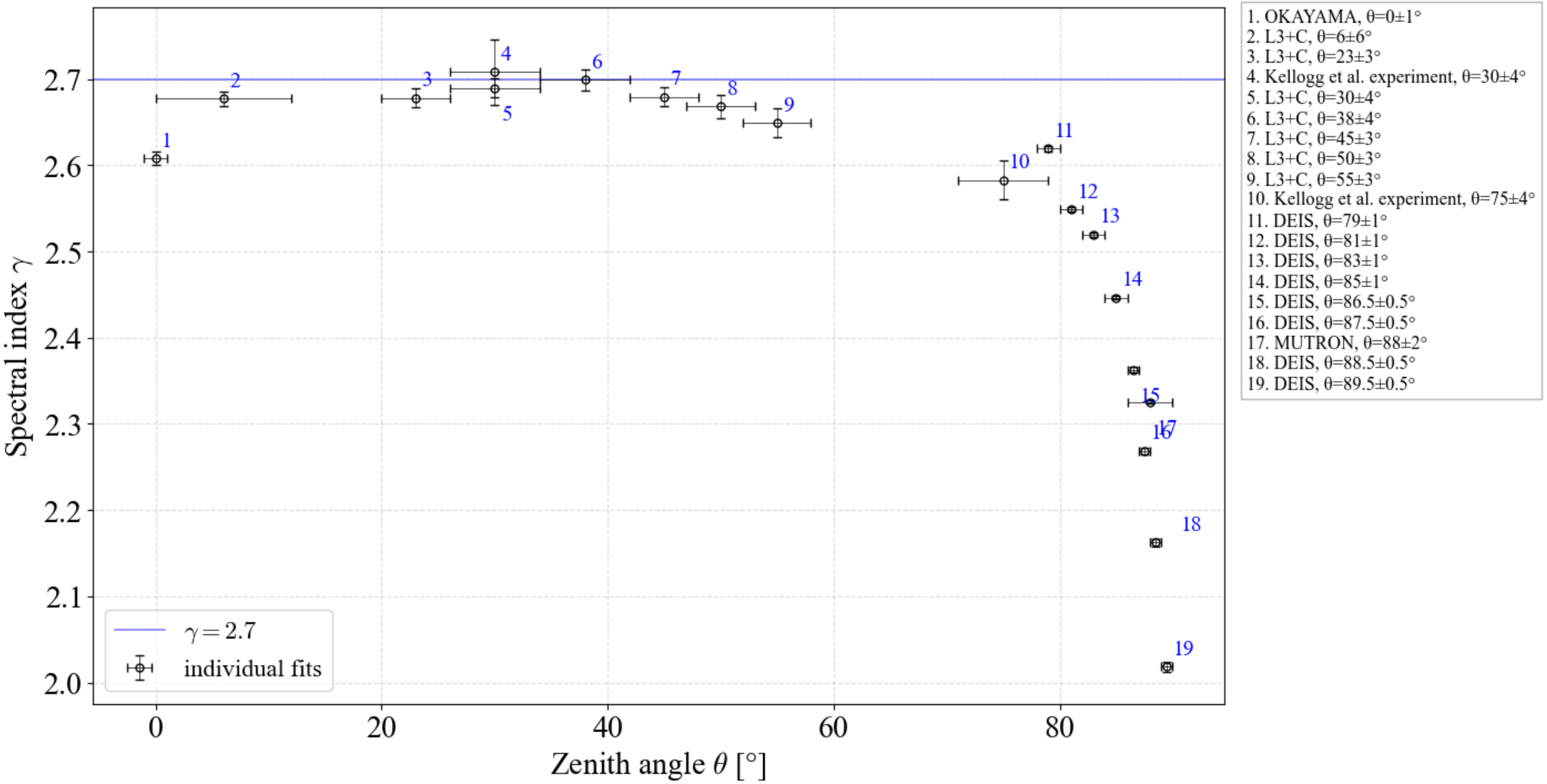


Рис. 7 – Зависимость γ от зенитного угла θ

Модель Шукла (Shukla)

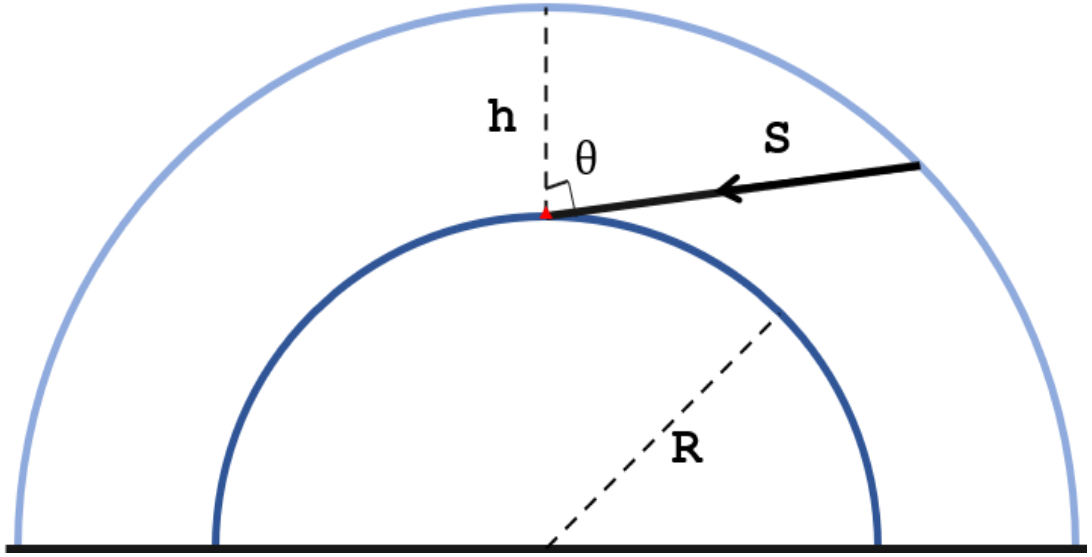
Эмпирический модифицированный степенной закон для импульсного распределения мюонов на уровне моря:

$$\frac{dI_\mu}{dE_\mu} = I_0\, N\,(E_0 + E_\mu)^{-n}\left(1 + \frac{E_\mu}{\varepsilon}\right)^{-1} D(\theta)^{-(n-1)}$$

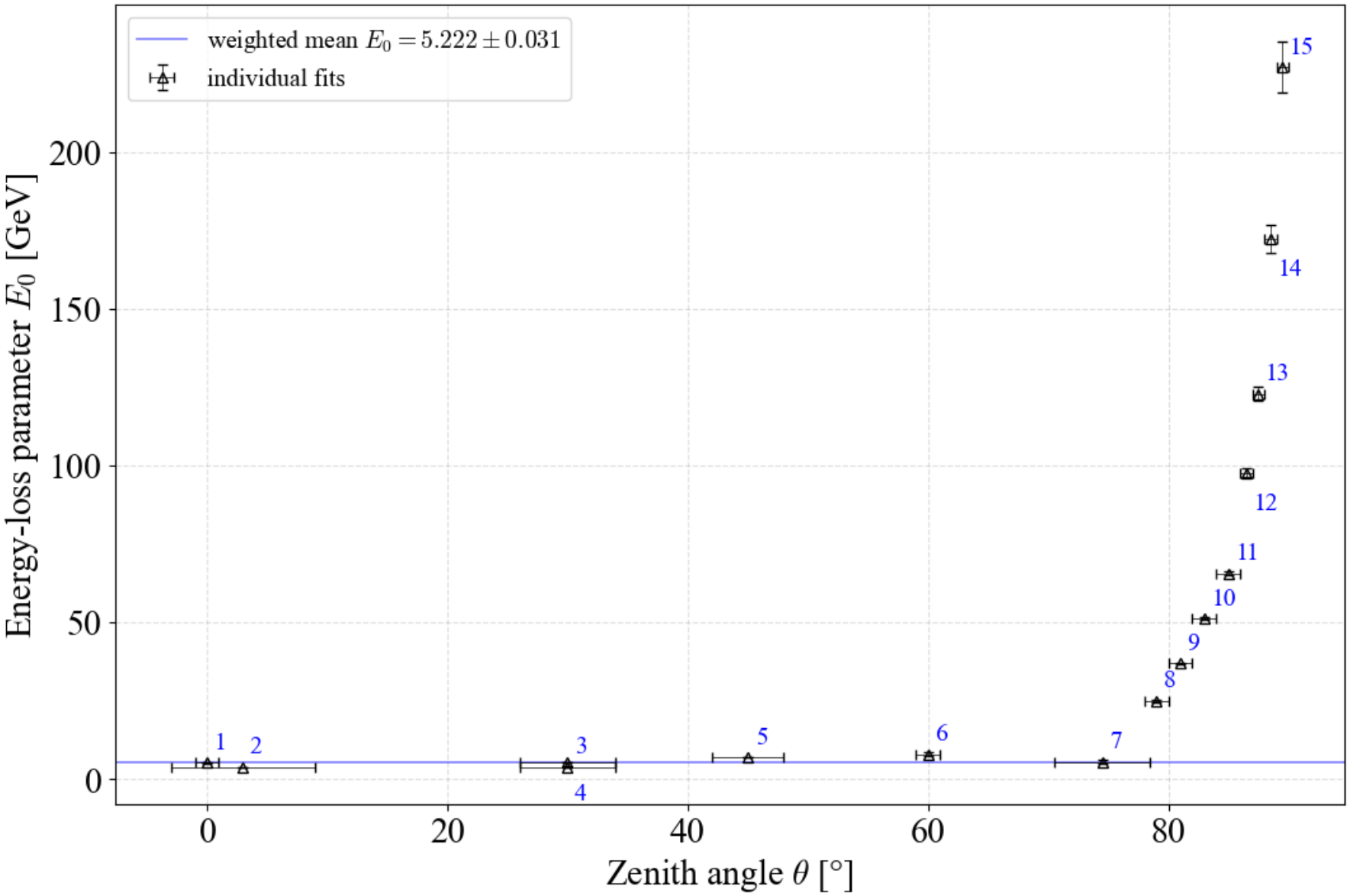
$$N = (n-1)(E_0 + E_c)^{n-1} \qquad D(\theta) = \sqrt{\frac{R^2}{h^2}\cos^2\theta + \frac{2R}{h} + 1} - \frac{R}{h}\cos\theta$$

Параметры

- I_0 - вертикальный поток, проинтегрированный по энергии (нормировка).
- n - показатель спектра;
- E_0 - потери энергии («загиб» при малых p).
- ε - завал при высоких E (фикс. ≈ 854 ГэВ);
- E_c - нижняя граница данных.
- D(θ) - отношение наклонной и вертикальной длины пути (сферическая Земля).



Модель Шукла (Shukla)



1. OKAYAMA, θ=0±1°
2. De Pascale et al. experiment, θ=0° + L3+C, θ=6±6°
3. Nottingham, θ=30° + Kellogg et al. experiment, θ=30±4°
4. OKAYAMA, θ=30±4° + L3+C, θ=30±4°
5. Nottingham, θ=45° + L3+C, θ=45±3°
6. OKAYAMA, θ=60±1°
7. OKAYAMA, θ=74±1° + Kellogg et al. experiment, θ=75±4°
8. DEIS, θ=79±1°
9. DEIS, θ=81±1°
10. DEIS, θ=83±1°
11. DEIS, θ=85±1°
12. DEIS, θ=86.5±0.5°
13. DEIS, θ=87.5±0.5°
14. DEIS, θ=88.5±0.5°
15. DEIS, θ=89.5±0.5°

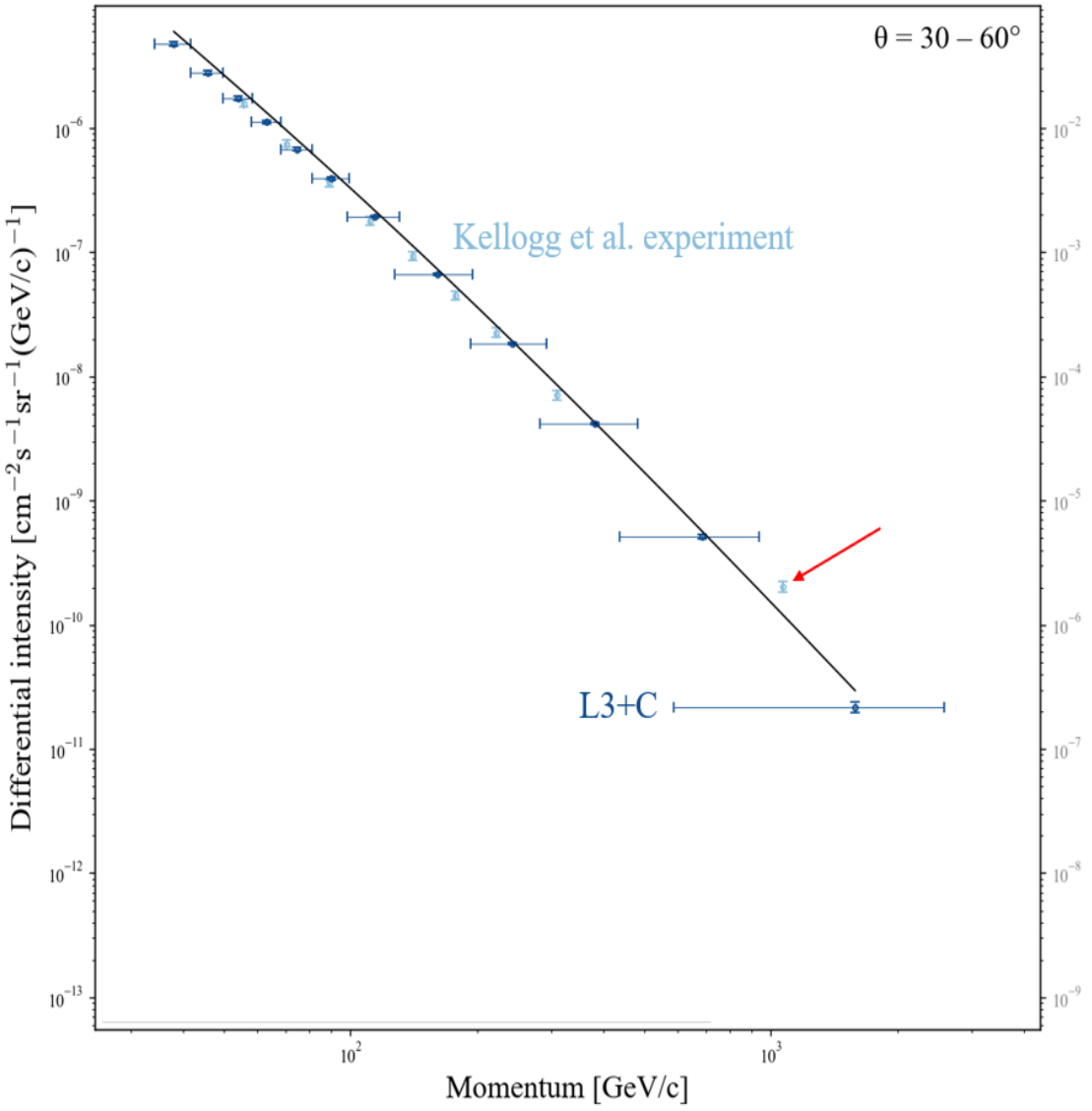
Рис.9 – Зависимость E0 от зенитного угла

Формирование выборки данных

Для каждого зенитного угла θ из базы SQLite отбирались экспериментальные точки. Для модели Гайссера - только E > 100 ГэВ; для остальных - полный диапазон энергий.

Минимизация χ^2

Оптимальные параметры каждой модели находились методом наименьших квадратов. Минимизация выполнялась алгоритмом Левенберга–Марквардта (scipy.optimize.curve_fit), возвращающим оценки параметров и ковариационную матрицу.

Анализ угловой зависимости

Процедура повторялась независимо для каждого углового диапазона. По совокупности результатов строились зависимости свободных параметров (γ, A, n, I_0 …) от зенитного угла θ.